

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ-ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR

§ 6.1 Ορισμοί

Ορισμός 6.1.1 Εστω a_n είναι μία πραγματική ακολουθία και x, x_0 είναι πραγματικοί αριθμοί. Ένα “άπειρο” πολυώνυμο της μορφής:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad (1)$$

καλείται **δυναμοσειρά** με κέντρο το σημείο x_0 . Αν $x_0 = 0$ τότε η δυναμοσειρά καλείται και **σειρά McLaurin**:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (2)$$

Οι αριθμοί $a_0, \dots, a_n, \dots$ καλούνται **συντελεστές** της δυναμοσειράς και ο x_0 καλείται **κέντρο** της δυναμοσειράς.

Είναι προφανές το ερώτημα: Για ποιες τιμές του x η δυναμοσειρά (1) συγκλίνει;

Ορισμός 6.1.2 Το σύνολο I των σημείων $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά (1) συγκλίνει καλείται **τόπος σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Ορισμός 6.1.3 Το σύνολο I_0 των σημείων $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η δυναμοσειρά (1) είναι απολύτως συγκλίνουσα, δηλαδή

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x-x_0|^n < +\infty$$

καλείται **τόπος απόλυτης σύγκλισης** της δυναμοσειράς.

Προφανώς $x_0 \in I$ αφού $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_0)^n = a_0$, άρα ο τόπος σύγκλισης όπως και ο τόπος απόλυτης σύγκλισης δεν είναι ποτέ το κενό σύνολο. Εστω $x \in I$ όπου I είναι ο τόπος σύγκλισης της δυναμοσειράς. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f : I \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n.$$

Θα μελετήσουμε τον τόπο σύγκλισης μιας δυναμοσειράς. Επειδή η μελέτη των δυναμοσειρών της μορφής (1) ανάγεται στη μελέτη της αντίστοιχης σειράς Mc Laurin με την αντικατάσταση $y = x-x_0$, στα επόμενα θα μελετήσουμε τον τόπο σύγκλισης μιας σειράς Mc Laurin.

Θεώρημα 6.1.1 (Abel) (i) Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει για κάποιο πραγματικό αριθμό ξ τότε συγκλίνει και μάλιστα απόλυτα για κάθε x στο ανοικτό διάστημα $(-|\xi|, |\xi|)$.

(ii) Αν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ δεν συγκλίνει για κάποιο πραγματικό αριθμό ξ τότε αυτή δεν συγκλίνει για όλα τα x που ανήκουν στο σύνολο $(-\infty, -|\xi|) \cup (|\xi|, +\infty)$.

Πρόταση 6.1.1 Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lambda$, τότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{εάν } 0 < \lambda < +\infty \Rightarrow \text{η δυναμοσειρά } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ συγκλίνει απόλυτα για } |x| < \frac{1}{\lambda} \\ \text{εάν } \lambda = 0 \Rightarrow \text{η δυναμοσειρά } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ συγκλίνει απόλυτα για κάθε } x \\ \text{εάν } \lambda = +\infty \Rightarrow \text{η δυναμοσειρά } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ συγκλίνει μόνον για } x = 0 \end{array} \right.$$

Απόδ. Αμεση συνέπεια του κριτηρίου του λόγου για σειρές (βλέπε Κεφ. 5) και του Θεωρήματος 6.1.1. $\square$

Πρόταση 6.1.2 Θεωρούμε τη δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Αν $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lambda$, τότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{εάν } 0 < \lambda < +\infty \Rightarrow \text{η δυναμοσειρά } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ συγκλίνει απόλυτα για } |x| < \frac{1}{\lambda} \\ \text{εάν } \lambda = 0 \Rightarrow \text{η δυναμοσειρά } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ συγκλίνει απόλυτα για κάθε } x \\ \text{εάν } \lambda = +\infty \Rightarrow \text{η δυναμοσειρά } \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ συγκλίνει μόνον για } x = 0 \end{array} \right.$$

Απόδ. Αμεση συνέπεια του κριτηρίου της ρίζας για σειρές (βλέπε Κεφ. 5) και του Θεωρήματος 6.1.1. $\square$

Σημείωση 1 Τόσο η Πρόταση 6.1.1 όσο και η Πρόταση 6.1.2 προσδιορίζουν ένα διάστημα σύγκλισης της δυναμοσειράς της μορφής $(-1/\lambda, 1/\lambda)$ και ένα σύνολο απόκλισης $(-\infty, -1/\lambda) \cup (1/\lambda, +\infty)$. Τι συμβαίνει όμως όσον αφορά τη σύγκλιση της δυναμοσειράς στα σημεία $x = \pm 1/\lambda$;

Μελετούμε ξεχωριστά τη σύγκλιση των αριθμητικών σειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{\lambda^n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{\lambda^n}$$

στα σημεία $x = 1/\lambda$, $x = -1/\lambda$, για να προσδιορίσουμε επακριβώς τον τόπο σύγκλισης και απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Σημείωση 2 Για να αποφύγουμε τη χρήση των τύπων των Προτάσεων 6.1.1 και 6.1.2, όταν θέλουμε να βρούμε τον τόπο σύγκλισης μιας δυναμοσειράς μπορούμε να εφαρμόσουμε κατευθείαν το κριτήριο λόγου ή ρίζας (βλέπε Κεφ. 5) για σειρές και κάνουμε διερεύνηση όλων των περιπτώσεων.

Παράδειγμα Να ευρεθεί ο τόπος σύγκλισης και ο τόπος απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^n$.

Λύση. Θεωρώ την ακολουθία $a_n(x) = \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^n$ και εφαρμόζω το κριτήριο του λόγου για σειρές:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}(x)|}{|a_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3^{n+1} |x|^{n+1}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{3^n |x|^n}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3|x|\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 3|x|.$$

- Αν $3|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^n$ συγκλίνει απόλυτα, άρα συγκλίνει.
- Αν $3|x| > 1 \Rightarrow |x| > \frac{1}{3} \Rightarrow x > \frac{1}{3}$ ή $x < -\frac{1}{3} \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, τότε η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} x^n$ αποκλίνει.
- Για $|x| = 1/3$, δεν έχουμε συμπέρασμα. Μελετούμε λοιπόν ξεχωριστά τις περιπτώσεις αυτές.

1. Εστω $x = 1/3$, τότε η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

2. Εστω $x = -1/3$, τότε η δυναμοσειρά γίνεται:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} < +\infty, \text{ (Κριτήριο Leibnitz),}$$

αλλά αντιθέτως:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{3^n}{\sqrt{n}} \left(-\frac{1}{3} \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = +\infty.$$

Συμπερασματικά, ο τύπος σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το διάστημα $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$, ενώ ο τύπος απόλυτης σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι το ανοικτό διάστημα $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$. $\square$

Πρόταση 6.1.3 (Παραγωγή δυναμοσειρών) Αν μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ έχει τόπο σύγκλισης το ανοικτό διάστημα $(-\rho, \rho)$, τότε και η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ έχει ως τόπο σύγκλισης το ίδιο ανοικτό διάστημα $(-\rho, \rho)$. Αν λοιπόν ορίσουμε:

$$f : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R} : f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

τότε για κάθε $x \in (-\rho, \rho)$ υπάρχει η παράγωγος $f'(x)$ και ισχύει:

$$f' : (-\rho, \rho) \rightarrow \mathbb{R} : f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Ορισμός 6.1.4 Εστω δύο σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ορίζουμε το **γινόμενο (συνέλιξη)** των δύο σειρών κατά **Cauchy** ως μία νέα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, όπου:

$$c_n = \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k}.$$

Πρόταση 6.1.4 Αν δύο δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ έχουν τον ίδιο τόπο σύγκλισης $(-\rho, \rho)$, τότε το γινόμενό τους κατά Cauchy έχει τόπο σύγκλισης ένα υπερέσυνολο του $(-\rho, \rho)$. Αν ορίσουμε $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $x \in (-\rho, \rho)$, τότε:

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad x \in (-\rho, \rho),$$

όπου c_n είναι όπως στον ορισμό 6.1.4.

§ 6.2 Το πολυώνυμο Taylor

Ας θεωρήσουμε το πολυώνυμο

$$P_n(y) = a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Θα δούμε ότι οι συντελεστές του a_i εκφράζονται συναρτήσει των παραγώγων της συνάρτησης $P_n(y)$ στο σημείο $y = 0$. Πράγματι, παραγωγίζοντας διαδοχικά έχουμε:

$$\begin{aligned} P'_n(y) &= a_1 + 2a_2 y + \dots + na_n y^{n-1} \\ P''_n(y) &= 2a_2 + 6a_3 y + \dots + n(n-1)a_n y^{n-2} \\ P'''_n(y) &= 6a_3 + 24a_4 y + \dots + n(n-1)(n-2)a_n y^{n-3}, \\ &\dots \\ P^{(n)}_n(y) &= n(n-1)(n-2)\dots 1a_n = n!a_n \end{aligned}$$

οπότε θέτοντας $y = 0$, έχουμε:

$$\begin{aligned} P_n(0) &= a_0 \\ P'_n(0) &= a_1 \\ P''_n(0) &= 2a_2 \\ P'''_n(0) &= 6a_3 \\ &\dots \\ P^{(n)}_n(0) &= n!a_n \end{aligned}$$

άρα μπορούμε να γράψουμε το πολυώνυμο $P_n(y)$ ως εξής:

$$P_n(y) = P_n(0) + P'_n(0)y + \frac{P''_n(0)}{2}y^2 + \frac{P'''_n(0)}{6}y^3 \dots + \frac{P^{(n)}_n(0)}{n!}y^n. \quad (3)$$

Αν θέσουμε μάλιστα $y = x - x_0$, μπορεί εύκολα να διαπιστώσει κανείς ότι το πολυώνυμο:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n, \quad a_i \in \mathbb{R}$$

γράφεται ως εξής:

$$P_n(x) = P_n(x_0) + P'_n(x_0)(x - x_0) + \frac{P''_n(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}_n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (4)$$

Η σχέση (4) καλείται ανάπτυγμα Taylor του πολυωνύμου $P_n(x)$ κατά τις δυνάμεις του $x - x_0$.

Θεωρούμε τώρα μία συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα I της πραγματικής ευθείας η οποία έχει σε ένα σημείο $x_0 \in I$ παραγώγους μέχρι n -τάξεως. Θέλουμε να

βρούμε ένα πολυώνυμο βαθμού n της μορφής

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

που να ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$P_n(x_0) = f(x_0), P'_n(x_0) = f'(x_0), \dots, P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0). \quad (5)$$

Ενα τέτοιο πολυώνυμο δίνει η σχέση (4), οπότε για τα δεδομένα (5) παίρνουμε:

$$P_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \quad (6)$$

Η σχέση (6.6) είναι ένα πολυώνυμο προσέγγισης της συνάρτησης f στο σημείο x_0 και καλείται πολυώνυμο Taylor της συνάρτησης f στο σημείο x_0 .

Προφανώς αν η συνάρτηση f ΔΕΝ είναι πολυώνυμο, ισχύει:

$$f(x) - P_{n,f,x_0}(x) = R_{n,f,x_0}(x),$$

όπου η συνάρτηση $R_{n,f,x_0}(x)$ καλείται **υπόλοιπο**.

Ορισμός 6.2.1 Αν f είναι μία πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο $[a, b]$, $x_0 \in [a, b]$ και η f έχει παραγώγους μέχρι n -τάξεως στο σημείο x_0 , τότε το πολυώνυμο:

$$P_{n,f,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

καλείται **πολυώνυμο Taylor ή ανάπτυγμα Taylor** της f στο σημείο $x_0 \in I$.

Είναι σαφές ότι όταν το υπόλοιπο $R_{n,f,x_0}(x)$ είναι μικρό για όλα τα x που ανήκουν σε μία περιοχή του σημείου x_0 , τότε το πολυώνυμο Taylor $P_{n,f,x_0}(x)$ δίνει μία αρκετά καλή προσέγγιση της συνάρτησης $f(x)$ σε μία περιοχή του σημείου x_0 . Το πρόβλημα λοιπόν είναι ο προσδιορισμός του υπολοίπου $R_{n,f,x_0}(x)$.

Σημείωση 1 Το ανάπτυγμα Taylor μιας συνάρτησης f σε σημείο x_0 είναι μοναδικό.

Θεώρημα 6.2.1 Εστω $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι n -φορές παραγωγίσιμη στο $[a, b]$ με συνεχείς παραγώγους και υπάρχει η $(n+1)$ -παράγωγος της f στο (a, b) . Αν $x_0 \in [a, b]$, τότε για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει

$$R_{n,f,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad \xi \text{ μεταξύ των } x_0 \text{ και } x \text{ (υπόλοιπο Lagrange) ή}$$

$$R_{n,f}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x - \xi)^n (x - x_0), \quad \xi \text{ μεταξύ των } x_0 \text{ και } x \text{ (υπόλοιπο Cauchy)}.$$

§ 6.3 Η σειρά Taylor

Ορισμός 6.3.1 Αν $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει παραγώγους κάθε τάξεως στο σημείο $x_0 \in [a, b]$, τότε η δυναμοσειρά

$$T_{f,x_0}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

καλείται **σειρά του Taylor** στο σημείο x_0 και έχει τον τόπο σύγκλισής της, τον οποίο θα συμβολίζουμε στο εξής με I . Επιπλέον αν ισχύει

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad \forall x \in I \cap [a, b]$$

τότε θα λέμε ότι η f αναπτύσσεται στο $I \cap [a, b]$ σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $x_0 \in [a, b]$.

Θεώρημα 6.3.1 Εστω ότι η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει παραγώγους κάθε τάξεως στο $[a, b]$ και $x_0 \in [a, b]$. Αν I είναι ο τόπος σύγκλισης της σειράς Taylor $T_{f,x_0}(x)$, τότε η f αναπτύσσεται στο $I \cap [a, b]$ σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $x_0 \in [a, b]$ αν και μόνον αν για το υπόλοιπο $R_{n,f,x_0}(x)$ ισχύει

$$R_{n,f,x_0}(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \forall x \in I \cap [a, b].$$

Πρόταση 6.3.1 Εστω I είναι ο τόπος σύγκλισης της σειράς Taylor $T_{f,x_0}(x)$. Αν η συνάρτηση $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει φραγμένες παραγώγους κάθε τάξεως στο $I \cap [a, b]$, δηλαδή:

$$\exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I \cap [a, b] \quad |f^{(n)}(x)| \leq M,$$

τότε

$$R_{n,f,x_0}(x) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \forall x \in I \cap [a, b],$$

δηλαδή η f αναπτύσσεται στο $I \cap [a, b]$ σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο $x_0 \in [a, b]$.

Σημείωση 2 Όταν ισχύει $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_{n,f,x_0}(x) \neq 0$, τότε η σειρά Taylor που δημιουργείται από την f στο σημείο x_0 και να είναι συγκλίνουσα ΔΕΝ ισούται με την $f(x)$.

ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΠΟΥ ΘΕΩΡΟΥΝΤΑΙ ΓΝΩΣΤΕΣ

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\eta\mu x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\sigma\upsilon\nu x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \in (-1, 1]$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε το $\eta\mu(0.2)$ με σφάλμα μικρότερο του 0.001 .

Λύση

$$f(x) = \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

όπου c είναι μεταξύ του 0 και x . Αρκεί να βρούμε κατάλληλο $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left| \frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right| < 0.001.$$

Επειδή $\left| \frac{f^{(2n+1)}(c)}{(2n+1)!} (0.2)^{2n+1} \right| < \frac{1}{(2n+1)!} (0.2)^{2n+1}$ έχουμε ότι για $n = 2$ ισχύει $\frac{1}{5!} (0.2)^5 < 0.001$. Υπολογίζοντας το

$$\frac{0.2}{1!} - \frac{0.2^3}{3!}$$

έχουμε ότι

$$|\sin(0.2) - 0.198| < 0.001.$$

2. Εστω $f(x) = xe^x$. Να υπολογίσετε τον τύπο της n -ιοστής παραγώγου της συνάρτησης $f(x)$. Να αναπτύξετε σε σειρά McLaurin τη συνάρτηση $f(x)$ και να υπολογίσετε τον τόπο σύγκλισής της. Συγκλίνει η σειρά McLaurin στην $f(x)$;

Λύση

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + xe^x = (1+x)e^x \\ f''(x) &= e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= e^x + (n-1+x)e^x = (n+x)e^x \end{aligned}$$

Θα δείξουμε με τη μέθοδο της επαγωγής ότι $f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$. Είδαμε παραπάνω η σχέση ισχύει για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι $f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$ και θα δείξουμε ότι $f^{(n+1)}(x) = (n+1+x)e^x$. Πράγματι από την υπόθεση $f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$ έχουμε:

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \left((n+x)e^x\right)' = (n+x)e^x + e^x = (n+1+x)e^x,$$

άρα ο τύπος $f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$ ισχύει για κάθε φυσικό αριθμό n .

Για $x_0 = 0$ έχουμε $f^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(0) = n$, άρα η σειρά McLaurin της $f(x)$ είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} (x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n.$$

Επίσης είναι εύκολο να δείξουμε ότι η σειρά McLaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$ συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον, ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η σειρά McLaurin $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^n$ να συγκλίνει στην $f(x)$ είναι $R_{n,f,0}(x) \rightarrow 0$, $n \rightarrow +\infty \forall x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε όμως ότι το υπόλοιπο δίνεται από την ακόλουθη ισότητα (Lagrange):

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x) \text{ ή } \xi \in (x, 0)$$

ή ισοδύναμα

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad |\theta| < 1.$$

Υπολογίσαμε όμως ότι

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{(n+1+\theta x)e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{1}{n!} x^{n+1} + \frac{\theta x e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Εστω $\alpha_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n!}$, τότε: $\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$, οπότε

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{1}{n!} x^{n+1} + \frac{\theta x e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty, \forall x \in \mathbb{R},$$

άρα η σειρά McLaurin συγκλίνει στην $f(x)$. $\square$

3. Εστω $f(x) = \sigma \nu x$. Να υπολογίσετε τον τύπο της n -ιοστής παραγώγου της $f(x)$. Να αναπτύξετε σε σειρά McLaurin τη συνάρτηση $f(x)$ και να δείξετε ότι η σειρά McLaurin συγκλίνει στην $f(x)$ για κάθε x . Να δείξετε ότι το σφάλμα κατά την προσέγγιση της f στο $[-1,1]$ από το πολυώνυμο $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ δεν υπερβαίνει το $\frac{1}{6!}$.

Λύση

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\eta \mu x = \sigma \nu \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \\ f''(x) &= -\sigma \nu x = \sigma \nu \left(x + \pi \right) \\ f'''(x) &= \eta \mu x = \sigma \nu \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) \\ f^{(4)}(x) &= \sigma \nu x = \sigma \nu \left(x + 2\pi \right) \\ &\dots \\ f^{(n)}(x) &= \sigma \nu \left(x + \frac{n\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

Με τη μέθοδο της επαγωγής δείχνουμε ότι $f^{(n)}(x) = \sigma \nu \left(x + \frac{n\pi}{2} \right)$.

Για $x_0 = 0$ έχουμε $f^{(n)}(0) = \sigma \nu \left(\frac{n\pi}{2} \right) = \begin{cases} 0, & n \text{ περιττός} \\ \pm 1 & n \text{ άρτιος} \end{cases}$, άρα η σειρά McLaurin της $f(x)$ είναι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x - 0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι ο τόπος σύγκλισης αυτής είναι όλο το $\mathbb{R}$. Επιπλέον, ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η σειρά McLaurin της $f(x)$ να συγκλίνει στην $f(x)$ είναι το υπόλοιπο $R_{n,f,0}(x) \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty \forall x \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε όμως ότι το υπόλοιπο δίνεται από την ακόλουθη ισότητα (Lagrange):

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \xi \in (0, x) \text{ ή } \xi \in (x, 0)$$

ή ισοδύναμα

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad |\theta| < 1.$$

Από τα παραπάνω έχουμε

$$R_{n,f,0}(x) = \frac{\sigma \nu \left(\theta x + \frac{n\pi}{2} \right)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad \text{άρα } |R_{n,f}(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Εστω $\alpha_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1}$, τότε: $\left| \frac{a_{n+1}(x)}{a_n(x)} \right| = \frac{|x|}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}$, άρα:

$$|R_{n,f}(x)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

άρα η σειρά McLaurin συγκλίνει στην $f(x)$. Παρατηρούμε ότι το πολυώνυμο Taylor 2^{ου} βαθμού της $\sigma \nu(x)$ στο $x_0 = 0$ είναι:

$$P_{2,f,0}(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

Επειδή $\sigma \nu(x) = P_{2,f,0}(x) + R_{2,f,0}(x)$ και

$$R_{2,f,0} = \frac{\sigma \nu(\theta x + 3\pi)}{6!}, \quad |\theta| < 1, \quad \text{έχουμε:}$$

$$\left| \sigma \nu(x) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \right) \right| = \left| \frac{\sigma \nu(\theta x + 3\pi)}{6!} \right| \leq \frac{1}{6!}. \quad \square$$