Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών, μορφής πηλίκου, Bernoulli, Euler

1 Δ.Ε. χωριζομένων μεταβλητών

Ορισμός: Μια Δ.Ε. (πρώτης τάξης) λέγεται ότι είναι χωριζομένων μεταβλητών όταν μπορεί να πάρει τη μορφή

$$y' = f(x)g(y) \text{ όπου } y' = \frac{dy}{dx} \tag{1}$$

Μέθοδος επίλυσης: Η εξίσωση (3) γράφεται $\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$. Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης ως προς x έχουμε:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c, \tag{2}$$

οπότε προσδιορίζουμε τη συνάρτηση $y(x)$ αν είναι δυνατό, διαφορετικά την αφήνουμε σε πεπλεγμένη μορφή.

Σημείωση: Επανάληψη σε επίλυση ολοκληρωμάτων!

Άσκηση 1: Να λυθεί η εξίσωση $y' = y^2 \exp(-x)$, $x \in \Re$.

Λύση.

Για $y \neq 0$, η εξίσωση γράφεται $\frac{dy}{y^2} = \exp(-x)dx$, οπότε η γενική λύση προκύπτει με ολοκλήρωση της τελευταίας και είναι:

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \exp(-x)dx + c \Rightarrow \frac{-1}{y} = -\exp(-x) + c \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\exp(-x) - c}$$

όπου c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Οπότε, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = \frac{1}{\exp(-x) - c}, \;\; x \in \Re.$$

Η $y = 0$ που εξαιρέσαμε παρατηρούμε ότι είναι λύση της Δ.Ε. που δεν προκύπτει από τη γενική λύση για κάποια τιμή της σταθεράς c.

Άρα, τελικά, όλες οι λύσεις της Δ.Ε. δίνονται από

$$y(x) = \frac{1}{\exp(-x) - c}, \;\; c \in \Re \quad \text{και } y(x) = 0, x \in \Re$$

Άσκηση 2: Να λυθεί η εξίσωση $y' = y(1 - y)$, $x \in \Re$.

Λύση.

Για $y(1-y) \neq 0$, δηλ, $y \neq 0$ και $y \neq 1$, η εξίσωση γράφεται $\dfrac{dy}{y(1-y)} = dx$, οπότε η γενική λύση προκύπτει με ολοκλήρωση της τελευταίας και είναι:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y(1-y)} = \int dx + c \Rightarrow \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1}dy\right) = x + c\\ \Rightarrow \log\left(\frac{y}{y-1}\right) = x + c\\ \Rightarrow |\frac{y}{y-1}| = e^c e^x\\ \Rightarrow \frac{y}{y-1} = \pm e^c e^x\\ \Rightarrow \frac{y}{y-1} = Ce^x,\end{aligned}$$

$C = \pm e^c$ με $C \neq 0$ και c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Οπότε, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = \frac{Ce^x}{Ce^x - 1}, Ce^x \neq 1, C \neq 0. \tag{3}$$

Οι $y(x) = 0, x \in \Re$ και $y(x) = 1, x \in \Re$ προφανείς λύσεις της Δ.Ε. (γιατί την επαληθεύουν). Η $y(x) = 0$ ενσωματώνεται στην (3) για $C = 0$ άρα η (3) $\Rightarrow y(x) = \dfrac{Ce^x}{Ce^x - 1},\ Ce^x \neq 1,\ C \in \Re$.

Άρα, τελικά, όλες οι λύσεις της Δ.Ε. δίνονται από

$$y(x) = \frac{Ce^x}{Ce^x - 1},\ C \in \Re,\ Ce^x - 1 \neq 0\ y(x) = 1,\ x \in \Re$$

Άσκηση 3: Να λυθεί το π.α.τ. $y' = (y+1)x,\ y(0) = 1$.

Λύση.

Για $y \neq -1$, η εξίσωση γράφεται $\dfrac{dy}{y+1} = x$, οπότε η γενική λύση προκύπτει με ολοκλήρωση της τελευταίας και είναι:

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y+1} = \int x dx + c \Rightarrow \log|y+1| = \frac{1}{2}x^2 + c \Rightarrow |y+1| = \exp(c + x^2/2)\\ \Rightarrow y + 1 = \pm\exp(c)\exp(x^2/2) = C\exp(x^2/2)\end{aligned}$$

όπου c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης, και $C = \pm\exp(c) =$ τ.ω. $C \neq 0$.

Άρα,

$$y(x) = -1 + C\exp(x^2/2).$$

Προκύπτει ότι $C = 2$, γιατί $y(0) = 1 \Leftrightarrow 1 + 1 = C\exp(0) \Leftrightarrow C = 2$. Άρα, η γενική λύση της Δ.Ε.

$$y(x) = 2\exp(x^2/2) - 1, \ \ x \in \Re.$$

Η $y = -1$ είναι προφανής λύση της Δ.Ε. (γιατί την επαληθεύει).

Άρα, τελικά, όλες οι λύσεις της Δ.Ε. δίνονται από

$$y(x) = 2\exp(x^2/2) - 1, \quad \text{και } y(x) = -1, x \in \Re$$

Άσκηση 4: Να λυθεί η εξίσωση $e^x dx = y dy, \ \ y(0) = 1$.

Λύση.

Με ολοκλήρωση της εξίσωσης έχουμε:

$$\int y dy = \int e^x dx + c \Rightarrow y^2 = 2e^x + 2c \Rightarrow y^2 = 2e^x + C$$

όπου c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης, και $C = 2c$ μία νέα σταθερά που θα προσδιοριστεί από την αρχική συνθήκη. Προκύπτει ότι $C = 1$, γιατί $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = 2e^0 + C \Rightarrow C = -1$. Άρα, η λύση του προβλήματος είναι

$$y^2 = 2e^x - 1 \Rightarrow y(x) = \pm\sqrt{2e^x - 1}.$$

Από τις δύο λύσεις στην τελευταία σχέση η μοναδική που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη είναι αυτή με το θετικό πρόσημο. Συνεπώς, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = \sqrt{2e^x - 1}, \ \ x > \log(1/2).$$

(Η τελευταία λύση ορίζεται για $2e^x - 1 > 0 \Rightarrow x > \log(1/2)$, δηλαδή $x \in (\log(1/2), \infty)$.)

Σημείωση: Στο π.α.τ. πρέπει να δίνεται συγκεκριμένη λύση και οι περιορισμοί να μην παραβιάζονται! Η λύση ενός π.α.τ. πρέπει πάντα να ορίζεται σε ένα διάστημα που περιέχει το αρχικό σημείο x_0

2 Με αντικατάσταση μεταβλητών

2.1 Ι

Στο μάθημα 21/03/2022 έχει λυθεί η άσκηση $y' = (2x + y - 1)^2$, θέτοντας $u = y + 2x - 1$ και ανάγοντας τη Δ.Ε. σε χωριζομένων μεταβλητών... να τη δείτε.

Άσκηση 5: Να λυθεί η εξίσωση $y' = x + y$, με χρήση της μεταβλητής $u(x) = x + y(x)$ ή συνοπτικά $u = x + y$.

Λύση.

Αφού $u = x + y$ και $y' = \frac{dy}{dx}$, έπεται ότι $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$. Τώρα,

$$\begin{aligned} y' = x + y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x + y \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 + u \Rightarrow \\ \frac{du}{u+1} = dx \Rightarrow \int \frac{1}{u+1} = \int dx + c \\ \Rightarrow \log|u+1| = x + c \Rightarrow |u+1| = \pm e^{x+c} \Rightarrow \\ u + 1 = \pm e^c e^x \Rightarrow u = -1 + Ce^x \end{aligned}$$

όπου c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης, και $C = \pm e^c$ μία νέα σταθερά.

2.2 Δ.Ε. της μορφής $y' = f(y/x), \;\; x \neq 0$

δηλαδή της οποίας η συνάρτηση δευτέρου μέλους εξαρτάται μόνο από το πηλίκο $\frac{y}{x}$ και όχι από τις μεταβλητές x και y ξεχωριστά. Επιλύονται με αντικατάσταση

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \Leftrightarrow y(x) = xu(x),$$

οπότε

$$y(x)' = u(x) + xu(x)'$$

Άσκηση 6: Να λυθεί η εξίσωση $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} \;\; x \neq 0$.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής έχουμε ότι

$$u + u'x = e^{-u} + u \Rightarrow u'x = e^{-u} \Rightarrow \frac{u'}{e^{-u}} = x.$$

Η Δ.Ε. είναι χωριζομένων μεταβλητών και μετά από ολοκλήρωση καταλήγουμε ότι

$$e^u = \log|x| + c = \log|xc_1|,$$

όπου c σταθερά ολοκλήρωσης και c_1 μία νέα σταθερά τέτοια ώστε $c = \log(c_1)$,

Από την τελευταία έχουμε

$$u = \log(\log|xc_1|),$$

από την οποία προκύπτει η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = x\log(\log|xc_1|).$$

Άσκηση 7: Να λυθεί η εξίσωση $y' = \dfrac{y-x}{y+x}$ $x \neq 0$.

Λύση. Έχει λυθεί στο μάθημα. Παρατηρείστε ότι $y-x = x(y/x-1)$ και $y+x = x(y/x+1)$, οπότε

$$\frac{y-x}{y+x} = \frac{x(y/x-1)}{x(y/x+1)} = \frac{y/x-1}{y/x+1}.$$

3 Δ.Ε. Bernoulli

Μια Δ.Ε. λέγεται Bernoulli όταν μπορεί να πάρει τη μορφή

$$y' + p(x)y = q(x)y^r,$$

όπου r ακέραιος αριθμός.

Για $r = 0 \Rightarrow$ γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης $\Rightarrow$ ολοκληρωτικός παράγοντας.

Για $r = 1 \Rightarrow$ χωριζομένων μεταβλητών.

Για $r > 0$ προφανής λύση της η $y = 0$.

Για διαφορετικές τιμές του r, χρήση του μετασχηματισμού $u = y^{1-r}$. Η Δ.Ε. γράφεται

$$u' + (1-r)p(x)u = (1-r)q(x).$$

Οπότε, η μη γραμμική Δ.Ε. πρώτης τάξης ανάγεται σε γραμμική Δ.Ε. με κατάλληλη αλλαγή της εξαρτημένης μεταβλητής.

Άσκηση 8: Να λυθεί το π.α.τ $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{5}{2}x^2y^3$, $x \neq 0$, $y(0) = 2$.

Λύση.

Δ.Ε. Bernoulli με r = 3. Εφαρμογή του μετασχηματισμού $u = y^{1-r} = y^{-2}$. Παραγωγίζουμε ως προς x και είναι:

$$v' = -2y^{-3}y'.$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της αρχικής εξίσωσης με τον όρο $-2y^{-3}$:

$$\begin{aligned} -2y^{-3}y' + 2y^{-3}\frac{y}{x} &= \frac{5}{2}x^2y^3 2y^{-3} \Rightarrow \\ u' + \frac{2}{x}y^{-2} &= 5x^2 \Rightarrow \\ u' + \frac{2}{x}u &= 5x^2, \end{aligned}$$

δηλ, καταλήξαμε σε μία Δ.Ε. γραμμική 1ης τάξης. Πολλαπλασιάζουμε με

$$\mu(x) = e^{\int 2/x dx} = e^{2\log|x|} = e^{\log(x^2)} = x^2$$

και καταλήγουμε $y^{-2} = u = x^3 + cx^{-2}$, όπου c σταθερά ολοκλήρωσης.

4 Δ.Ε. Euler

Μια Δ.Ε. λέγεται Euler όταν μπορεί να πάρει τη μορφή

$$x^2y'' + a_1xy' + a_0y = f(x), x \neq 0, a_1, a_2 \in \Re$$

Όταν $x > 0$, θέτουμε $u = \log(x)$ και όταν $x < 0$, θέτουμε $u = \log(-x)$ και καταλήγουμε στη Δ.Ε.

$$\ddot{y} + (a_1 - 1)\dot{y} + a_0y = f(e^u),$$

όπου $\dot{y} = \dfrac{dy}{dx}$ και $\ddot{y} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ η οποία είναι γραμμική Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές.

Άσκηση 9: Να λυθεί η εξίσωση $x^2y'' - xy' - 3y = \log(x)\ \ x > 0$.

Λύση.

Με το μετασχηματισμό $u = \log(x)$ η Δ.Ε. παίρνει τη μορφή $\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = u$, η οποία είναι Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές.

Βήμα 1: Λύνω την ομογενή $x^2y'' - xy' - 3y = 0$. Έχουμε $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$. $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 3$ και έτσι η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς Δ.Ε. είναι

$$y_{\rm o} = c_1e^{-u} + c_2e^{3u},\ \ c_1, c_2 \in \Re$$

Βήμα 2. Βρίσκω μία ειδική λύση. Έστω η εδική λύση της μορφής $y_{\rm e}(u) = Au + B$, όπου οι τιμές των A, B πρέπει να προσδιοριστούν. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε $y_{\rm e}(u)' = A$ και $y_{\rm e}(u)'' = 0$. Αντικαθιστούμε τώρα τη δοκιμαστική λύση στη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε ότι $A = -1/3$, $B = 2/9$. Άρα, η ειδική λύση είναι $y_{\rm e}(u) = -\dfrac{u}{3} + \dfrac{2}{9}$.

Βήμα 3: Η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(u) = y_{\rm o}(u) + y_{\rm e}(u) = c_1e^{-u} + c_2e^{3u} - \frac{u}{3} + \frac{2}{9}.$$

Με την αντικατάσταση $u = \log(x)$, η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = \frac{c_1}{x} + c_2x^3 + \frac{2}{9} - \frac{1}{3}\log(x).$$

Ασκήσεις για εξάσκηση για όποιον επιθυμεί (δε χρειάζεται να παραδοθούν, δε βαθμολογούνται):

- Να λυθεί η Δ.Ε. $y' + y = y^{-1}$.
- Να λυθεί η Δ.Ε. $y' + \dfrac{6}{x}y = 3y^{4/3},\ \ x > 0$.

- Να λυθεί η Δ.Ε. $y' = y^2$
- Να λυθεί το π.α.τ $y'' - 4y' + 13y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3.$
- Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - y' - 2y = 2x2 - 2x + 1$
- Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - 2y' - 3y = (x + 1)e^{3x}$
- Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - 4y' + 4y = 5\sin(2x)$
- Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' + 9y = \sin(3x) + \cos(3x)$
- Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - y = x^2 + 1 + 2e^x + \cos(2x)$