Γραμμικές Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές

Οι γραμμικές Δ.Ε. με σταθερούς συντελεστές έχουν τη μορφή

- $y' + \alpha y = f(x)$: 1ης τάξης
- $y'' + \alpha y' + \beta y = f(x)$: 2ης τάξης,

όπου $\alpha, \beta \in \Re$ σταθερές και f μία συνεχής συνάρτηση μη μηδενική στο διάστημα ενδιαφέροντος.

Όταν $f(x) = 0$, η Δ.Ε. λέγεται ομογενής.

Σημείωση:

- $y' = \dfrac{dy}{dx}$, $y'' = \dfrac{d^2y}{d^2x}$
- Η εξίσωση είναι γραμμική επειδή η άγνωστη συνάρτηση y και οι παράγωγοί της εμφανίζονται μόνο στην πρώτη δύναμη και όχι σε γινόμενα μεταξύ τους ή ως ανεξάρτητες μεταβλητές άλλων συναρτήσεων.
- Αν y_1 και y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, η συνάρτηση $y = c_1y_1 + c_2y_2$, όπου c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες πραγματικές σταθερές, ονομάζεται γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης και εκφράζει όλες τις δυνατές ομογενείς λύσεις.
- Οι γραμμικοί συνδυασμοί των λύσεων μιας γραμμικής ομογενούς εξίσωσης είναι επίσης λύσεις.

1 Ομογενείς

Άσκηση 1: Η λύση της $y' + \alpha y = 0$ είναι $y(x) = ce^{-\alpha x}$, c: σταθερά.

(δες άσκηση 6 θέτοντας $\beta = 0$)

Άσκηση 2: Να λυθεί η Δ.Ε.

$$y'' + \alpha y' + \beta y = 0, \ \ \alpha, \beta \in \Re \text{ σταθερές} \tag{1}$$

Για τη σχέση (1) αναζητώ λύσεις της μορφής $e^{\lambda x}$, όπου λ σταθερά που πρέπει να προσδιοριστεί.

$$\boxed{e^{\lambda x} \text{ λύση της (1)} \Leftrightarrow \lambda \text{ ρίζα του } p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta}$$

Περιπτώσεις: $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$

1. Αν $\Delta > 0$,
   το $p(\lambda)$ έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες $\lambda_{1,2} = \dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \Rightarrow e^{\lambda_1 x},\ \ e^{\lambda_2 x}$ γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις της Δ.Ε. $\Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$ η γενική λύση της (1).
2. Αν $\Delta = 0$,
   το $p(\lambda)$ έχει μία διπλή πραγματική ρίζα $\lambda = -\dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow e^{\lambda x},\ \ xe^{\lambda x}$ γραμμικές ανεξάρτητες λύσεις της Δ.Ε. $\Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$ η γενική λύση της (1).
3. Αν $\Delta < 0$,
   το $p(\lambda)$ έχει δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες $\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\delta \Rightarrow e^{\gamma x}\cos(\delta x),\ \ e^{\gamma x}\sin(\delta x)$ οι πραγματικές (γραμμικές ανεξάρτητες) λύσεις της Δ.Ε. $\Rightarrow y(x) = c_1 e^{\gamma x}\cos(\delta x) + c_2 e^{\gamma x}\sin(\delta x)$ η γενική λύση της (1).

Table 1: Γενική λύση της $y'' + \alpha y' + \beta y = 0,\ \ \alpha, \beta \in \Re$ (σταθερές).

$\Delta = \alpha^2 - 4\beta$	Ρίζες $p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$	Γενική λύση
> 0	$\lambda_{1,2} = \dfrac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$	$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
$= 0$	$\lambda = -\dfrac{\alpha}{2}$ (διπλή)	$y(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$
< 0	$\lambda_{1,2} = \gamma \pm i\delta$	$y(x) = c_1 e^{\gamma x}\cos(\delta x) + c_2 e^{\gamma x}\sin(\delta x)$

Άσκηση 3: Να λυθούν οι Δ.Ε.

(i) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(ii) $y'' - 4y' + 4y = 0$

(iii) $y'' - 2y' + 2y = 0$

Λύση

(i) $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$. Έχουμε $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 2 \Rightarrow e^x,\ \ e^{2x}$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, άρα $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x},\ \ c_1, c_2 \in \Re$ (γενική λύση).

(ii) $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$. ''Εχουμε $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2$ (διπλή) $\Rightarrow e^{2x},\ \ xe^{2x}$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, άρα $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x},\ \ c_1, c_2 \in \Re$ (γενική λύση).

(iii) $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. ''Εχουμε $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

$\Rightarrow e^x \cos(x),\ \ e^x \sin(x)$ δύο γραμμικά ανεξάρτητες πραγματικές λύσεις, άρα $y(x) = c_1 e^x \cos(x) + c_2 e^x \sin(x),\ \ c_1, c_2 \in \Re$ (γενική λύση).

Άσκηση 4: Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' + y' - 6y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y(0)' = -5$.

Λύση

$p(\lambda) = \lambda^2 + 1\lambda - 6$. Έχουμε $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = -3$. Άρα, η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x},\ \ c_1, c_2 \in \Re.$$

Οι αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται τώρα από τις αρχικές συνθήκες.

$$y(0) = c_1 + c_2 = 0$$
$$y(0)' = 2c_1 - 3c_2 = -5$$

Λύνοντας αυτές τις δύο εξισώσεις προκύπτουν οι σταθερές $c_1 = -1,\ \ c_2 = 1$.

Άσκηση 5: Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' + 16y = 0,\ \ y(0) = -2,\ \ y(0)' = 6$.

Λύση

$p(\lambda) = \lambda^2 + 0\lambda + 16$. Έχουμε $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0 + 4i,\ \ \lambda_2 = 0 - 4i$. Άρα, η γενική λύση είναι

$$y(x) = c_1 \cos(4x) + c_2 \sin(4x),\ \ c_1, c_2 \in \Re.$$

Έχουμε $y(x)' = -4c_1 sin(4x) + 4c_2 cos(4x)$. Οι αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2 προσδιορίζονται τώρα από τις αρχικές συνθήκες.

$$y(0) = c_1 cos(4 \times 0) + c_2 sin(4 \times 0) = c_1 = -2$$
$$y(0)' = -4c_1 sin(4 \times 0) + 4c_2 cos(4 \times 0) = 4c_2 = 6.$$

Λύνοντας αυτές τις δύο εξισώσεις προκύπτουν οι σταθερές $c_1 = -2,\ \ c_2 = 3/2$.

2 Μη ομογενείς

Άσκηση 6: Να δείξετε ότι η λύση της Δ.Ε. $y' + \alpha y = \beta,\ \ \alpha, \beta \in \Re$ (σταθερές) είναι

$$y(x) = ce^{-\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha},\quad c\text{: σταθερά},$$

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με τον όρο $\int e^a \, dx = e^{ax}$.

$$
\begin{aligned}
y' + \alpha y &= \beta \Leftrightarrow \\
y' e^{\alpha x} + \alpha y e^{\alpha x} &= \beta e^{\alpha x} \Leftrightarrow \\
(y e^{\alpha x})' &= \beta e^{\alpha x} \Leftrightarrow \\
\int (y e^{\alpha x})' \, dx &= \int \beta e^{\alpha x} \, dx + c \Leftrightarrow \\
y e^{\alpha x} &= \frac{\beta}{\alpha} \int \alpha e^{\alpha x} \, dx + c \Leftrightarrow \\
y e^{\alpha x} &= \frac{\beta}{\alpha} \int (e^{\alpha x})' \, dx + c \Leftrightarrow \\
y e^{\alpha x} &= \frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha x} + c \Leftrightarrow \\
y &= c e^{-\alpha x} + \frac{\beta}{\alpha}
\end{aligned}
$$

Άσκηση 7: Να λυθεί η Δ.Ε. $y' + 2y = 1, \;\; y(0) = 2$.

Λύση

Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε ότι $y(x) = ce^{-2x} + \frac{1}{2}$. Επειδή $y(0) = 2 \Rightarrow ce^0 + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow c = 3/2$.

Βήματα επίλυσης μη ομογενούς 2ης τάξης:

1. Βρείτε δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις y_1 και y_2 της ομογενούς εξίσωσης $y'' + \alpha y' + \beta y = 0$.
2. Βρείτε μια ειδική λύση y_ε της μη ομογενούς εξίσωσης $y'' + \alpha y' + \beta y = f(x)$.
3. Γενική λύση $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_\varepsilon$.
4. Τα c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές που υπολογίζονται αν υπάρχουν αρχικές συνθήκες.

Table 2: Ειδικές λύσεις.

$f(x)$	$y_\varepsilon(x)$
$p_n(x)$: πολυώνυμο βαθμού n	$A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$
$e^{\alpha x}$	$A e^{\alpha x}$
$\sin(bx)$ or $\cos(bx)$	$A \sin(bx) + B \cos(bx)$
$p_n(x) e^{\alpha x}$	$(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0) e^{\alpha x}$
$e^{\alpha x} \sin(bx)$	$e^{\alpha x}(A \sin(bx) + B \cos(bx))$

Σημείωση: Για τις λύσεις που προτείνονται στον Πίνακα 2 πρέπει κανείς όρος της $y_\varepsilon(x)$ να μην είναι μια ομογενής λύση, σε διαφορετική περίπτωση οι λύσεις που παρουσιάζονται στον Πίνακα πολλαπλασιάζονται επί x^s, όπου s είναι ο μικρότερος μη μηδενικός ακέραιος που διασφαλίζει ότι κανείς όρος της προτεινόμενη λύσης δεν είναι μια ομογενής λύση.

Άσκηση 8: Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' - 3y' + 2y = f(x)$, όπου

(i) $f(x) = x$

(ii) $f(x) = e^x$

(iii) $f(x) = xe^{2x}$

Λύση

Βήμα 1. Λύνω την ομογενή $y'' - 3y' + 2y = 0$. Από άσκηση 3 έχουμε ότι

$$y_o(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}, \;\; c_1, c_2 \in \Re.$$

Βήμα 2. Βρίσκω μία ειδική λύση

(i) $f(x) = x$

Έστω ότι η ειδική λύση είναι της μορφής $y_\varepsilon(x) = Ax + B$, όπου οι τιμές των A και B πρέπει να προσδιοριστούν. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι $y_\varepsilon(x)' = A$ και $y_\varepsilon(x)'' = 0$. Αντικαθιστούμε τώρα τη δοκιμαστική λύση στη διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε ότι

$$y_\varepsilon(x)'' - 3y_\varepsilon(x)' + 2y_\varepsilon(x)' = x \Leftrightarrow 0 - 3A + 2(Ax + B) = x \Leftrightarrow -3A + 2B + 2Ax = x,$$

Επειδή η τελευταία συνθήκη πρέπει να ισχύει για κάθε x, πρέπει $-3A + 2B = 0$ και $2A = 1$, οπότε $A = 1/2, \;\; B = \dfrac{3}{2}A = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$. Άρα, η ειδική λύση είναι

$$y_\varepsilon(x) = x/2 + 3/4.$$

(ii) $f(x) = e^x$

Έστω ότι η ειδική λύση είναι της μορφής $f(x) = Ae^x$, όπου το A πρέπει να προσδιοριστεί. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι $y_\varepsilon(x)' = Ae^x$ και $y_\varepsilon(x)'' = Ae^x$. Αντικαθιστούμε τώρα τη δοκιμαστική λύση στη διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε ότι

$$y_\varepsilon(x)'' - 3y_\varepsilon(x)' + 2y_\varepsilon(x)' = x \Leftrightarrow Ae^x - 3Ae^x + 2Ae^x = e^x \Leftrightarrow A - 3A + 2A = 1 \Leftrightarrow 0 = 1.$$

Δηλαδή, καταλήξαμε σε κάτι αδύνατο. Η δοκιμαστική λύση δεν εφαρμόζεται γιατί Ae^x είναι όρος της γενικής λύσης της ομογενούς Δ.Ε.

Έστω ότι η ειδική λύση είναι της μορφής $f(x) = Axe^x$, όπου το A πρέπει να προσδιοριστεί. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι $y_\varepsilon(x)' = Ae^x(x+1)$ και $y_\varepsilon(x)'' = Ae^x x + 2Ae^x$.

Αντικαθιστούμε τώρα τη δοκιμαστική λύση στη διαφορική εξίσωση και βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
y_\varepsilon(x)'' - 3y_\varepsilon(x)' + 2y_\varepsilon(x)' = x &\Leftrightarrow \\
Axe^x + 2Ae^x - 3Ae^x(x+1) + 2Axe^x = e^x &\Leftrightarrow \\
Ax + 2A - 3Ax - 3A + 2Ax = 1 &\Leftrightarrow \\
-A = 1 &\Leftrightarrow \\
A = -1 &
\end{aligned}
$$

Άρα, $y_\varepsilon(x) = -e^x(x+1)$.

(iii) $f(x) = xe^{2x}$
Η ειδική λύση της μορφής $y_\varepsilon(x) = (Ax+B)e^{2x}$ θα αποτύχει γιατί περιέχει όρο της ομογενούς λύσης. Δοκιμάζουμε τη λύση της μορφής $y_\varepsilon(x) = x(Ax+B)e^{2x} = (Ax^2 + Bx)e^{2x}$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι $y_\varepsilon(x)' = (2Ax+B)e^{2x} + 2e^{2x}(Ax^2+Bx)$ και $y_\varepsilon(x)'' = 2e^{2x}A + 4e^{2x}Ax^2 + 8e^{2x}Ax + 4e^{2x}B + 4e^{2x}xB$. Αντικαθιστούμε τώρα τη δοκιμαστική λύση στη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
y_\varepsilon(x)'' - 3y_\varepsilon(x)' + 2y_\varepsilon(x)' = xe^{2x} &\Leftrightarrow \\
2A + 4Ax^2 + 8Ax + 4B + 4xB - 3(2Ax+B) - & \\
6(Ax^2+Bx) + 2(Ax^2+Bx) = x &\Leftrightarrow \\
2A + 4Ax^2 + 8Ax + 4B + 4Bx - 6Ax - 3b - & \\
6Ax^2 - 6Bx + 2Ax^2 - 6Bx + 2Ax^2 + 2Bx = x &\Leftrightarrow \\
2A + B + 2Ax = x &\Leftrightarrow \\
A = 1/2 \text{ και } B = -2A = -1 &
\end{aligned}
$$

Άρα, $y_\varepsilon(x) = x(x/2-1)e^{2x}$.

Βήμα 3: Η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = y_o(x) + y_\varepsilon(x).$$

Άσκηση 9: Να λυθεί η Δ.Ε. $y'' + 9y = 4\sin(3x)$.

Λύση

Βήμα 1: Λύνω την ομογενή $y'' + 9y = 0$.

Έχουμε $p(\lambda) = \lambda^2 + 0\lambda + 9$. $p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \pm 3i$. Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι

$$y_o(x) = c_1\sin(3x) + c_2\cos(3x), \quad c_1, c_2 \in \Re.$$

Βήμα 2. Βρίσκω μία ειδική λύση.

Η ειδική λύση $y_\varepsilon(x) = A\sin(3x) + B\cos(3x)$ θα αποτύχει γιατί περιέχει όρους της ομογενούς (αντικαθιστώντας την $y_\varepsilon(x)$ στη διαφορική εξίσωση θα πάρουμε ότι $y_\varepsilon(x)'' + 9y_\varepsilon(x) = 0 \neq 4\sin(3x)$).

Έστω η εδική λύση της μορφής $y_\varepsilon(x) = Ax\sin(3x) + Bx\cos(3x)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε ότι $y_\varepsilon(x)'' = A(6\cos(3x) - 9x\sin(3x)) + B(-6\sin(3x) - 9x\cos(3x))$. Αντικαθιστούμε τώρα τη δοκιμαστική λύση στη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
y_\varepsilon(x)'' + 9y_\varepsilon(x)' = 4\sin(3x) \Leftrightarrow \\
A(6\cos(3x) - 9x\sin(3x)) + B(-6\sin(3x) - 9x\cos(3x)) + \\
9(Ax\sin(3x) + Bx\cos(3x)) = 4\sin(3x) \Leftrightarrow \\
-6B\sin(3x) + 6A\cos(3x) - (9A - 9A)x\sin(3x) - (9B - 9B)x\cos(3x) = 4\sin(3x) \Leftrightarrow \\
-6B\sin(3x) + 6A\cos(3x) = 4\sin(3x) \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Από την τελευταία σχέση εξισώνουμε τους συντελεστές των $\sin(3x)$ και $\cos(3x)$ και καταλήγουμε ότι $A = 0$ και $B = -2/3$. Άρα, η ειδική λύση είναι $y_\varepsilon(x) = (-2/3)x\cos(3x)$.

Βήμα 3: Η γενική λύση της Δ.Ε. είναι

$$y(x) = y_o(x) + y_\varepsilon(x) = c_1\sin(3x) + c_2\cos(3x) + (-2/3)x\cos(3x).$$