Πρόβλημα 1. Δίδεται η αναδρομική σχέση $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n + 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, με αρχικές συνθήκες $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Να βρείτε μια έκφραση για την x_n για γενικό n. Ποια είναι η τιμή του x_{10};

Πρόβλημα 2. Έστω Δ_n η ορίζουσα $n \times n$ που ορίζεται ως

$$\Delta_n \ := \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \ \ n = 3, 4, \ldots, \qquad \Delta_1 = | \, 1 \, |, = 1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Να δείξετε ότι η ακολουθία $\{\Delta_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, ικανοποιεί μια αναδρομική εξίσωση της μορφής

$$\Delta_n \ = \ a\,\Delta_{n-1} \ + \ b\,\Delta_{n-2} \qquad n = 3, 4, 5, \ldots.$$

και να προσδιορίσετε τα a, b. Να επιλύσετε την αναδρομική σχέση και να υπολογίσετε την Δ_n για γενικό n.

Πρόβλημα 3. Δίδεται η ρητογραμμική αναδρομική σχέση $x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, με αρχικη συνθήκη $x_0 = 2$. Να βρείτε μια έκφραση για τον γενικό όρο της ακολουθίας x_n συναρτήσει του n.

Πρόβλημα 4. **(α)** Να βρείτε την λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$y' + 3x\,y \ = \ x, \qquad y(0) = 1.$$

(β) Παρομοίως, να λυσετε την

$$y'' + 2y' + 2y \ = \ \sin x, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$$

Πρόβλημα 5. Θεωρείστε την ΔΕ

$$\frac{d^2y}{dx^2} \ = \ a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

όπου $a > 0$ δεδομένη σταθερά. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $p = \frac{dy}{dx}$ και την σχέση $\frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$ να λύσετε την εξίσωση με αρχικές συνθήκες $y(0) = \frac{1}{a}$ και $y'(0) = 0$.

Πρόβλημα 6. Να επιλύσετε τις ακόλουθες ΔΕ. Στην περίπτωση που δεν είναι ακριβείς θα πρέπει να βρείτε πρώτα έναν κατάλληλο ολοκληρωτικό παράγοντα.
(α) $(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0,$
(β) $2xydx + \left(y^2 - 3x^2\right) dy = 0,$
(γ) $e^y\, dx + x\, (e^y + \sin y)\, dy = 0.$
(δ) $ydx + \left(x^2y - x\right) dy = 0.$

Πρόβλημα 7. Να επιλύσετε τις ΔΕ
(α) $y' \;=\; \frac{4x^2+3y^2}{2xy},$
(β) $xy' + 6y - 3xy^{4/3} \;=\; 0,$
(γ) $\frac{dx}{dt} = 6x(5-x)$, με αρχική συνθήκη $x(0) = 1$.

Πρόβλημα 8. Θεωρείστε την διαδικασία Leslie με τρεις ηλικιακές ομάδες, $\boldsymbol{x}_{n+1} = A\boldsymbol{x}_k$ όπου

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

και $\boldsymbol{x}_n = [x_n(1), x_n(2), x_n(3)]^T$ περιγράφει τον αριθμό ατόμων σε κάθε ηλικιακή ομάδα την χρονική στιγμή n. Ποιό είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A; Να βρείτε την μεγαλύτερη ιδιοτιμή του A που δίνει τον ρυθμό αύξησης του πληθυσμού. Αν $\boldsymbol{x}_0 = [1, 2, 3]^T$ να βρείτε ασυμπτωτικά την κατανομή του πληθυσμού στις ηλικιακές ομάδες για μεγάλες τιμές του n.

Πρόβλημα 9. α) Αν $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3x^2y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, να βρείτε τα κρίσιμα σημεία και να τα κατατάξετε σε σημεία μεγίστου, ελαχίστου ή σαγματικά.
β) Θεωρείστε την συνάρτηση $g(x, y) = x^2 + y^3 - 3x - 2y$ ορισμένη στο σύνολο $S := \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$. Να δείξετε ότι η g είναι κυρτή στο S και να βρείτε το ολικό της ελάχιστο στο σύνολο αυτό.

Πρόβλημα 10. Να βρείτε τα δεσμευμένα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x_1, x_2) := \frac{1}{4}x_1^2 + x_2^2$ υπό τον περιορισμό $g(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + x_2^2 - 1 = 0$. Να εξετάσετε αν είναι σημεία μεγίστου, ελαχίστου ή σαγματικά.

Πρόβλημα 11. Να βρείτε το παραλληλεπίπεδο μεγίστου όγκου που μπορεί να εγγραφεί μέσα στο ελλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Πρόβλημα 12. Να βρείτε το ολικό ελάχιστο και το ολικό μέγιστο της συνάρτησης $f(x, y, z) := x + y - z$ στο σύνολο $S := \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.