1 Προβλήματα

Πρόβλημα 1. *Να επιλύσετε την γραμμική αναδρομική σχέση*

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n \;=\; 2, \;\; \textit{με αρχικές συνθήκες}\; x_0 = 1, \;\; x_1 = 3. \tag{1}$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ ή $(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0$. Η γενική λύση της ομογενούς εξίσωσης είναι $x_n = C_1 1^n + C_2 2^n$. Το δεξί μέλος της (1) είναι της μορφής $2 \cdot 1^n$ και, επειδή το 1 είναι λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης, μια ειδική λύση της μη ομογενούς θα είναι της μορφής An για A το οποίο προσδιορίζεται ως εξής:

$$A(n+2) - 3A(n+1) + 2An = 2 \;\;\Rightarrow\;\; 2A - 3A = 2 \;\;\Rightarrow\;\; A = -2.$$

Συνεπώς η γενική λύση της μη ομογενούς είναι $x_n = C_1 + C_2 2^n - 2n$. Για να βρούμε την λύση που ικανοποιεί και τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& C_1 + C_2 2^0 - 2 \cdot 0 \\ 3 &=& C_1 + C_2 2^1 - 2 \cdot 1 \end{array} \;\;\Rightarrow\;\; C_1 = -3, \;\; C_2 = 4$$

και επομένως

$$x_n \;=\; -3 + 42^n - 2n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Πρόβλημα 2. *Να επιλύσετε την διαφορική εξίσωση*

$$y' - \frac{x+1}{x+2} y \;=\; \frac{2}{x+2} \quad \textit{με αρχική συνθήκη}\; y(0) = 1. \tag{2}$$

Λύση: Η (2) είναι γραμμική, μη ομογενής, πρώτης τάξης. Ο ολοκληρωτικός παράγων είναι

$$\begin{aligned} \exp\left(\int \left(-\frac{x+1}{x+2}\right) dx\right) \;&=\; \exp\left(\int \left(-1 + \frac{1}{x+2}\right) dx\right) \;=\; \exp(-x + \ln|x+2|) \\ &=\; |x+2|\, e^{-x}. \end{aligned}$$

Αφού η αρχική συνθήκη δίδεται για $x = 0$ θεωρούμε ότι $x > -2$ και επομένως $|x+2| = x + 2$. Πολλαπλασιάζοντας με τον ολοκληρωτικό παράγοντα έχουμε

$$(x+2)e^{-x}y' - (x+1)e^{-x}y \;=\; 2(x+1)e^{-x} \;\;\Rightarrow\;\; \big((x+2)e^{-x}y\big)' \;=\; 2e^{-x}$$

Ολοκληρώνοντας έχουμε

$$(x+2)e^{-x}y \;=\; 2\int e^{-x}dx + C \;=\; -2e^{-x} + C$$

και συνεπώς

$$y(x) \;=\; -\frac{2}{x+2} + C\frac{e^x}{x+2}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την αρχική συνθήκη έχουμε

$$1 = y(0) = -1 + C\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 4$$

και επομένως

$$y(x) \;=\; \frac{4e^x - 2}{x+2}, \quad x > -2.$$

Πρόβλημα 3. *Να επιλύσετε την ρητογραμμική αναδρομική σχέση*

$$y_{n+1} \;=\; 1 - \frac{3}{16\, y_n} \quad \text{με αρχική συνθήκη } y_0 = 1. \tag{3}$$

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $\lambda \;=\; 1 - \frac{3}{16\,\lambda}$ με λύσεις $\lambda = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1 - 4\,\frac{3}{16}}\right)$. Οι δύο ρίζες είναι $\lambda_1 = 3/4$ και $\lambda_2 = 1/4$. Επομένως ισχύει

$$y_{n+1} - \lambda_i \;=\; 1 - \frac{3}{16\,y_n} - \left(1 - \frac{3}{16\,\lambda_i}\right) \;=\; \frac{3(y_n - \lambda_i)}{16\,y_n\lambda_i} \quad i = 1, 2.$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε

$$\frac{y_{n+1} - \lambda_1}{y_{n+1} - \lambda_2} \;=\; \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\,\frac{y_n - \lambda_1}{y_n - \lambda_2}.$$

Θέτοντας

$$u_n \;:=\; \frac{y_n - \lambda_1}{y_n - \lambda_2} \tag{4}$$

και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας ότι $\lambda_2/\lambda_1 = 1/3$ παίρνουμε

$$u_{n+1} \;=\; \frac{1}{3}u_n, \quad u_0 \;=\; \frac{y_0 - \frac{3}{4}}{y_0 - \frac{1}{4}} \;=\; \frac{1}{3}.$$

Συνεπώς $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n u_0 = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ και αντικαθιστώντας στην (4) παίρνουμε τελικά

$$y_n \;=\; \frac{1}{4}\,\frac{3^{n+2} - 1}{3^{n+1} - 1}, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Παρατηρείστε από την παραπάνω έκφραση ότι

$$\lim_{n\to\infty} y_n \;=\; \frac{3}{4}.$$

Πρόβλημα 4. *Θεωρείστε το διαφορικό σύστημα*

$$\begin{array}{rcrrr} x_1' &=& -x_1 & & +1 \\ x_2' &=& x_1 & -2x_2 & \end{array}$$

με αρχικές συνθήκες $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

1η Λύση: Το συγκεκριμένο σύστημα λύνεται εύκολα γιατί η μεταβλητή x_1 δεν εξαρτάται από την x_2. Η πρώτη εξίσωση είναι γραμμική πρώτης τάξης, μη ομογενής με ολοκληρωτικό παράγοντα $\exp(\int dt) = e^t$. Συνεπώς

$$e^t x_1' + e^t x_1 \;=\; e^t \quad\Rightarrow\quad \left(e^t x_1\right)' \;=\; e^t \quad\Rightarrow\quad e^t x_1 \;=\; e^t + C_1 \quad\Rightarrow\quad x_1 \;=\; 1 + C_1 e^{-t}.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $x_1(0) = 0$ βρίσκουμε ότι $C = -1$ και επομένως

$$x_1(t) \;=\; 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Η δεύτερη εξίσωση γράφεται ως $x_2' + 2x_2 \;=\; 1 - e^{-t}$ και έχει ολοκληρωτικό παράγοντα $\exp(\int 2dt) = e^{2t}$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} &e^{2t}x_2' + 2e^{2t}x_2 \;=\; e^{2t} - e^t \quad\Rightarrow\quad \left(e^{2t}x_2\right) \;=\; e^{2t} - e^t \quad\Rightarrow\quad e^{2t}x_2 \;=\; \frac{1}{2}e^{2t} - e^t + C_2 \\ &\Rightarrow\quad x_2 \;=\; \frac{1}{2} - e^{-t} + C_2 e^{-2t}. \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $1 = x_2(0) = \frac{1}{2} - 1 + C_2$, έχουμε $C_2 = \frac{3}{2}$. Επομένως η λύση του συστήματος είναι

$$x_1(t) \;=\; 1 - e^{-t}, \tag{6}$$
$$x_2(t) \;=\; \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}. \tag{7}$$

2η Λύση: Το σύστημα γράφεται σε διανυσματική μορφή ως

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ή $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + b$ όπου $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ και $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Η εξίσωση αυτή λύνεται με την βοήθεια του εκθετικού του πίνακα A. Ισχύει ότι

$$e^{-At}\frac{d}{dt}x(t) - e^{-At}Ax(t) = e^{-At}b \quad\Rightarrow\quad \left(e^{-At}x(t)\right)' = e^{-At}b$$

και ολοκληρώνοντας από 0 ως t έχουμε $e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-Au}bdu$ ή

$$x(t) \;=\; e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-u)}bdu. \tag{8}$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακά A είναι -1 και -2 (τα διαγώνια στοιχεία, αφού ο A είναι τριγωνικός). Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι

$$-1 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad -2 \;\rightarrow\; \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πίνακας των ιδιοδιανυσμάτων M και ο αντίστροφός του είναι

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Το εκθετικό του πίνακα είναι

$$e^{At} = M \begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{-2t} \end{bmatrix} M^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ e^{-t} - e^{-2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Αντικαθιστώντας στην (8) και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν τις τιμές των $x(0)$ και b έχουμε

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-(t-u)} \\ e^{-(t-u)} - e^{-2(t-u)} \end{bmatrix} du = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ 1 - e^{-t} - \frac{1-e^{-2t}}{2} \end{bmatrix}.$$

Η έκφραση αυτή είναι ίδια με τις (6), (7).