Μη-Παραμετρική Στατιστική

Φροντιστήριο #6 - Έλεγχος Kruskal-Wallis

Ο έλεγχος Mann-Whitney για δύο ανεξάρτητα δείγματα μπορεί να επεκταθεί για προβλήματα που αναφέρονται σε κ πληθυσμούς, κ > 2. Αυτή η επέκταση πραγματοποιήθηκε από τους Kruskal-Wallis, το 1952.

Έχουμε διαθέσιμα κ ανεξάρτητα δείγματα, κάθε ένα, προερχόμενο από κ, ενδεχομένως διαφορετικούς πληθυσμούς.

Θέλουμε να ελέγξουμε τη μηδενική υπόθεση:

H_0: οι συναρτήσεις κατανομής των κ πληθυσμών είναι ταυτοτικά ίδιες,

έναντι της:

H_1: τουλάχιστον ένας από τους πληθυσμούς τείνει να αποδίδει μεγαλύτερες παρατηρήσεις από τουλάχιστον έναν από τους υπόλοιπους πληθυσμούς.

Ο έλεγχος Kruskal-Wallis συχνά στοχεύει στο να εντοπίζει διαφορές μεταξύ των μέσων τιμών των κ πληθυσμών και επομένως, η εναλλακτική υπόθεση μπορεί να γραφεί ως εξής:

H_1: τουλάχιστον δύο από τους κ πληθυσμούς έχουν διαφορετικές μέσες τιμές.

Ο έλεγχος Kruskal-Wallis χρησιμοποιεί ως ελεγχοσυνάρτηση μία συνάρτηση των τάξεων μεγέθους των παρατηρήσεων στο συνενωμένο δείγμα (όπως ο έλεγχος Mann-Whitney για κ=2).

Η τεχνική στην οποία στηρίζεται ο έλεγχος Kruskal-Wallis μπορεί να θεωρηθεί ως το μη-παραμετρικό ανάλογο της παραμετρικής διαδικασίας που είναι γνωστή ως ανάλυση διασποράς κατά ένα κριτήριο ή έλεγχος F κατά ένα κριτήριο. Γι'αυτό και είναι γνωστός στη βιβλιογραφία ως μη-παραμετρική ανάλυση διασποράς κατά ένα κριτήριο ή ως έλεγχος Kruskal-Wallis για την ανάλυση διασποράς κατά ένα κριτήριο με βάση τις τάξεις μεγέθους των παρατηρήσεων (the Kruskal-Wallis one way analysis of variance by ranks).

<u>Δεδομένα</u> <u>(Data)</u>: Αποτελούνται από κ ανεξάρτητα δείγματα, ενδεχομένως διαφορετικού μεγέθους, των οποίων τα στοιχεία μπορούν να ταξινομηθούν ως εξής:

Δείγμα 1	Δείγμα 2	...	Δείγμα κ
$X_{1,1}$	$X_{2,1}$		$X_{\kappa,1}$
$X_{1,2}$	$X_{2,2}$		$X_{\kappa,2}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
X_{1,n_1}	X_{2,n_2}		X_{κ,n_κ}

όπου n_i είναι το μέγεθος του i-οστού δείγματος παρατηρήσεων $X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{i,n_i}$, $i=1,\dots,\kappa$. Η κλίμακα μέτρησης των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον κλίμακα διάταξης.

Το σύνολο των παρατηρήσεων που προκύπτει από τη συνένωση των κ δειγμάτων το διατάσσουμε κατά αύξουσα τάξη μεγέθους. Έστω N ο συνολικός αριθμός των παρατηρήσεων:

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i .$$

Έστω $R(X_{ij})$ η τάξη μεγέθους της παρατήρησης X_{ij} και R_i το άθροισμα των βαθμών (τάξεων μεγέθους) που αντιστοιχίζονται στις παρατηρήσεις του i-οστού δείγματος, δηλαδή,

$$R_i = \sum_{j=1}^{n_i} R(X_{ij}), i=1,\ldots,k$$

Αν έχουμε ισοβαθμούσες παρατηρήσεις θέτουμε ως βαθμό τους, το μέσο βαθμό, το οποίον εισάγουμε σε κάθε μία από ισοβαθμούσες παρατηρήσεις (όπως κάναμε και στον έλεγχο Mann-Whitney).

ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ

1. Όλα τα δείγματα είναι τυχαία δείγματα από αντίστοιχους πληθυσμούς. Σε μία τέτοια περίπτωση λέμε ότι έχουμε ένα πλήρως τυχαιοποιημένο πειραματικό σχεδιασμό (completely randomized experimental design).

2. Εντός της ανεξαρτησίας των παρατηρήσεων σε κάθε δείγμα (within each sample) υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των δειγμάτων από τον καθένα από τους k πληθυσμούς.

③ Η κλίμακα μέτρησης είναι τουλάχιστον κλίμακα διάταξης.

④ Είτε οι συναρτήσεις κατανομής από τους k πληθυσμούς είναι ταυτοτικά ίδιοι είτε κάποιοι από τους πληθυσμούς τείνουν να έχουν μεγαλύτερες τιμές από αυτές των άλλων πληθυσμών.

Ο όρος μεγαλύτερες τιμές αναφέρεται σε παρατηρήσεις πάνω σε τυχαίες μεταβλητές. Πρακτικά, οποιεσδήποτε παρατηρήσεις που μπορούν να διαταχθούν κατ' αύξουσα σειρά μεγέθους σύμφωνα με κάποια ιδιότητα μπορούν να αναλυθούν χρησιμοποιώντας τον έλεγχο Kruskal-Wallis με τρόπο ανάλογο προς αυτόν με τον οποίον αναλύονται δεδομένα στην περίπτωση $k=2$ με τον έλεγχο Mann-Whitney.

Στατιστική Συνάρτηση Ελέγχου (Test Statistic).

Η σ.σ. ελέγχου T ορίζεται ως εξής:

$$T=\frac{1}{S^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}-\frac{N(N+1)^2}{4}\right) \quad (1)$$

όπου

$$S^2=\frac{1}{N-1}\left(\sum_{i,j}R(X_{ij})^2-\frac{N(N+1)^2}{4}\right)$$

Αν δεν υπάρχουν ισοβαθμούσες παρατηρήσεις, η έκφραση S^2 είναι ίση με $\frac{N(N+1)}{12}$ και η ελεγχοσυνάρτηση T παίρνει τη μορφή:

$$T=\frac{12}{N(N+1)}\sum_{i=1}^{k}\frac{R_i^2}{n_i}-3(N+1). \quad (2)$$

<u>Παρατήρηση:</u> Αν ο αριθμός των ισοβαθμιών είναι μέτριος, <u>δεν</u> υπάρχει μεγάλη διαφορά μεταξύ των σ.σ. ελέγχου που ορίζονται στις (1) και (2). Συνεπώς, η απλούστερη έκφραση της (2) γενικά προτιμάται. ☒

Η ακριβής κατανομή της σ.σ. T έχει προσδιοριστεί. Τα κρίσιμα σημεία της σ.σ. T περιέχονται π.χ. στον Πίνακα 26 του Παραρτήματος από το βιβλίο της Ξεκαλάκη για $k=3$ και $n_i \leq 5$, $i=1,2,3$ αν δεν υπάρχουν ισοβαθμούσες παρατηρήσεις. Εκτενέστεροι πίνακες δίνονται από τους Iman, Quade and Alexander (1975), (βλέπε βιβλίο Ξεκαλάκη).

Προσεγγιστικά, η κατανομή της σ.σ. T μπορεί να υπολογισθεί (θεωρώντας ικανοποιητική την προσέγγιση) από την κατανομή χ^2 με $k-1$ βαθμούς ελευθερίας.

Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου και στις δύο περιπτώσεις (είτε με ακρίβεια, είτε κατά προσέγγιση) χαρακτηρίζεται από τις τιμές της σ.σ. T που υπερβαίνουν το $(1-\alpha)$-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής όπου π.χ. για χ^2_n, $\chi^2_{n;1-\alpha}$ είναι τ.ω.

$$P\left(T > \chi^2_{n;1-\alpha}\right) = \alpha.$$

<u>Πολλαπλές Συγκρίσεις (Multiple comparisons)</u>

Αν η H_0 απορριφθεί, ο ερευνητής μπορεί να ακολουθήσει μία διαδικασία πολλαπλών συγκρίσεων για να προσδιορίσει ποια ζεύγη πληθυσμών εμφανιζουν διαφορές.

Θεωρούμε ότι οι πληθυσμοί i και j εμφανίζονται να είναι διαφορετικοί, όταν ισχύει η ακόλουθη ανισότητα:

$$\left|\frac{R_i}{n_i}-\frac{R_j}{n_j}\right| > t_{N-k,1-\alpha/2}\left(S^2\frac{N-1-T}{N-k}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)^{1/2},$$

όπου:

R_i, R_j είναι τα αθροίσματα των τάξεων μεγέθους των δύο δειγμάτων και $t_{N-k,1-\alpha/2}$ είναι το $(1-\alpha/2)$-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής t με $N-k$ β.ε. και είναι τέτοιο ώστε: $P\left(W > t_{N-k,1-\alpha/2}\right) = \alpha/2$, όπου $W \sim t_{N-k}$.

Κάποια επιπλέον σχόλια για την κατανομή της σ.σ. T

Η ακριβής κατανομή της T υπολογίζεται κάτω από την υπόθεση ότι όλες οι παρατηρήσεις λαμβάνονται από ταυτοτικά ίδιους πληθυσμούς. Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της τυχαιότητας (randomization method).

Οποιαδήποτε διαφορετική τοποθέτηση των βαθμών 1 μέχρι N στα δείγματα μεγέθους $n_1, n_2, \ldots, n_k$ είναι ισοπίθανη και συμβαίνει με πιθανότητα:

$$\frac{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}{N!}$$

που είναι το αντίστροφο του αριθμού των τρόπων με τους οποίους N βαθμοί μπορούν να "διαιρεθούν" (καταμερηθούν) σε ομάδες με μεγέθη $n_1, n_2, \ldots, n_k$, αντίστοιχα.

Η τιμή της T υπολογίζεται για κάθε πιθανή τοποθέτηση. Οι πιθανότητες που προκύπτουν αθροίζονται για να δώσουν τη συνάρτηση κατανομής της σ.σ. T.

Ας δούμε ένα παράδειγμα. Έστω 3 δείγματα, με $n_1=2$, $n_2=1$ και $n_3=1$. Εδώ προφανώς $k=3$. Τότε υπάρχουν 12 διαφορετικές τοποθετήσεις των 4 βαθμών. Άρα, κάθε μία έχει πιθανότητα $1/12$. Οι 12 τοποθετήσεις με τις αντίστοιχες τιμές της T, δίνονται παρακάτω:

Τοποθέτηση	Δείγματα 1	2	3	T
1	1,2	3	4	2.7
2	1,2	4	3	2.7
3	1,3	2	4	1.8
4	1,3	4	2	1.8
5	1,4	2	3	0.3
6	1,4	3	2	0.3
7	2,3	1	4	2.7
8	2,3	4	1	2.7
9	2,4	1	3	1.8
10	2,4	3	2	1.8
11	3,4	1	2	2.7
12	3,4	2	1	2.7

Άρα, η συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$ και η συνάρτηση κατανομής $F(x)$ της σ.σ. T για $n_1=2, n_1=1, n_3=1$ είναι:

x	$f(x)=P(T=x)$	$F(x)=P(T\leq x)$
0.3	$2/12=1/6$	$1/6$
1.8	$4/12=1/3$	$1/2$
2.7	$6/12=1/2$	1

Η προσεγγιστική κατανομή της T προκύπτει από το γεγονός ότι οι τ.μ. R_i είναι το άθροισμα n_i τ.μ. και συνεπώς για μεγάλες τιμές n_i το ΚΟΘ μπορεί να χρησιμοποιηθεί. Άρα,

$$\frac{R_i - E(R_i)}{\sqrt{var(R_i)}} \overset{H_0}{\underset{\text{προσεγγιστικά}}{\sim}} N(0,1)$$

Η μέση τιμή και η διασπορά της τ.μ R_i είναι:

$$E(R_i) = \frac{n_i(N+1)}{2} \quad \text{και} \quad var(R_i) = \frac{n_i(N+1)(N-n_i)}{12}.$$

Άρα,

$$\left[\frac{R_i - E(R_i)}{\sqrt{var(R_i)}}\right]^2 = \frac{\left\{R_i - \left[\frac{n_i(N+1)}{2}\right]\right\}^2}{\frac{n_i(N+1)(N-n_i)}{12}}$$

προσεγγιστικά κατανέμεται σαν χ^2 με 1 β.ε. Αν θεωρήσουμε τις τ.μ. R_i ανεξάρτητες μεταξύ τους, τότε η κατανομή του αθροίσματος:

$$T' = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left\{R_i - \left[\frac{n_i(N+1)}{2}\right]\right\}^2}{n_i(N+1)N/12}$$

μπορεί να προσεγγισθεί από την χ^2 με k β.ε

Ο Kruskal (1952), έδειξε ότι αν ο i-οστος όρος στη σσ. T' πολλαπλασιαστεί με $\frac{(N-n_i)}{N}$, για $i=1,2,\dots,k$ τότε η

σ.σ. $T = \sum_{i=1}^{k} \frac{\{R_i - [n_i(N+1)/2]\}^2}{n_i(N+1)N/12}$ είναι ασυμπτωτικά κατανεμημένη ως χ^2 με κ-1 β.ε. Έτσι, δικαιολογεί-ται η χρήση της χ^2-προσέγγισης της σ.σ. T με κ-1 β.ε.

<u>Παρατήρηση:</u> Για κ=2 δείγματα, η σ.σ. Kruskal-Wallis είναι ισοδύναμη με το Mann-Whitney test.

Υπενθυμίζουμε ότι στο Mann-Whitney test αν $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ήταν το ένα δείγμα, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ ήταν το άλλο δείγμα, η σ.σ. T είχε (αρχικά) οριστεί:

$$T = \sum_{i=1}^{n} R(X_i)$$

δηλαδή ήταν το άθροισμα των βαθμών των X στο ενιαίο δείγμα (αντίστοιχη σ.σ. της R_1 στο Kruskal-Wallis test). Ο αμφίπλευρος έλεγχος Mann-Whitney οδηγεί σε απόρριψη της H_0 αν η σ.σ. T είναι πολύ μικρή ή πολύ μεγάλη.

Επειδή η T είναι προσεγγιστικά κανονική για μεγάλα μεγέθη δείγματος η H_0 απορρίπτεται αν η ποσότητα:

$$\frac{T-E(T)}{\sqrt{var(T)}}$$

είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από το <u>τυποποιημένο</u> ποσοστιαίο σημείο της κανονικής κατανομής, ή η ποσότητα:

$$\frac{[T-E(T)]^2}{var(T)}$$

είναι μεγαλύτερη από το $\chi^2_{1;1-\alpha}$ ποσοστιαίο σημείο της χ^2 κατανομής. Άρα το Kruskal-Wallis test είναι ισοδύναμο με το Mann-Whitney test για κ=2.

Το συνηθισμένο παραμετρικό ανάλογο του Kruskal-Wallis test καλείται "one-way analysis of variance" ή πιο απλά one-way f-test. Η σ.σ. που χρησιμοποιείται είναι η:

$$f = \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i} - C\right) \Big/ (k-1)}{\left(\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{T_i^2}{n_i}\right) \Big/ (N-k)} \sim f_{k-1, N-k}$$

όπου T_i είναι το άθροισμα των παρατηρήσεων στο i-οστό δείγμα και $C = T^2/N$, όπου T είναι το άθροισμα όλων των παρατηρήσεων. Αποκλίσεις από την υπόθεση της κανονικότητας έχουν συχνά μικρή επίδραση στην κατανομή του στατιστικού f κάτω από την H_0. Όταν τα δεδομένα περιέχουν ακραίες τιμές ο έλεγχος Kruskal-Wallis μοιάζει προτιμότερος.

Ας δούμε ένα παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα</u> 4 μέθοδοι παραγωγής καλαμποκιού εφαρμόσθηκαν τυχαία σε ένα μεγάλο αριθμό διαφορετικών εκτάσεων γης. Η παραγωγή ανά στρέμμα, που αντιστοιχεί σε κάθε μέθοδο δίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Μέθοδος	Παραγωγή
1	83 91 94 89 89 96 91 92 90
2	91 90 81 83 84 83 88 91 89 84
3	101 100 91 93 96 95 94
4	78 82 81 77 79 81 80 81

Να ελεγχθεί κατά πόσον οι 4 μέθοδοι διαφέρουν σε αποτελεσματικότητα.

Λύση Οι προς έλεγχο υποθέσεις έχουν τη μορφή:

H_0: οι 4 μέθοδοι είναι ισοδύναμες (εξίσου αποτελεσματικές)

H_1: κάποιες από τις μεθόδους τείνουν να οδηγούν σε μεγαλύτερη παραγωγή από τις υπόλοιπες μεθόδους.

Το δείγμα που προκύπτει αν συνδυάσουμε τα 4 δείγματα σε ένα ενιαίο δείγμα μεγέθους $N = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 34$ και διατάξουμε τις παρατηρήσεις κατά αύξουσα σειρά μεγέθους είναι:

77 78 79 80 81 81 81 81 82 83 83 83
84 84 88 89 89 89 90 90 91 91 91 91
91 92 93 94 94 95 96 96 100 101

Στις παρατηρήσεις του δείγματος αυτού αντιστοιχίζονται οι βαθμοί 1 (στην μικρότερη, 77) μέχρι 34 (στην μεγαλύτερη, 101). Ισοβαθμούσες παρατηρήσεις αντιστοιχίζονται με τους μέσους των βαθμών που αυτές θα είχαν αν δεν ταυτίζονταν. Ο πίνακας που ακολουθεί παρέχει τα αποτελέσματα:

Η κρίσιμη περιοχή μεγέθους, κατά προσέγγιση ίσου με $\alpha = 0.05$ αντιστοιχεί στις τιμές της σ.σ. T που υπερβαίνουν το 95ο ποσοστιαίο σημείο της χ^2 με $k-1$ β.ε. Ορίζεται, από την ανισότητα:

$$T > \chi^2_{3,0.95} = 7.815.$$

Μέθοδος

1	Τάξη μεγέθους	2	Τάξη μεγέθους	3	Τάξη	4	Τάξη
83	11	91	23	101	34	78	2
91	23	90	19.5	100	33	82	9
94	28.5	81	6.5	91	23	81	6.5
89	17	83	11	93	27	77	1
89	17	84	13.5	96	31.5	79	3
96	31.5	83	11	95	30	81	6.5
91	23	88	15	94	28.5	80	4
92	26	91	23			81	6.5
90	19.5	89	17				
		84	13.5				
R_i:	196.5	R_i:	153.0	R_i:	207	R_i:	38.5
n_i:	9	n_i:	10	n_i:	7	n_i:	8

$N=34$

Η παρατηρούμενη τιμή της σ.σ. T για τα δεδομένα μας είναι $\tau=25.46$ και οδηγεί σε απόρριψη της H_o. Η τιμή του κρίσιμου επιπέδου $\hat{\alpha}$ είναι πολύ χαμηλή.

$$\hat{\alpha}=P(T>25.46 \mid H_o)=P(\chi^2_3>25.46)$$

$$=1-P(\chi^2_3<25.46)<0.001.$$

Άρα, η H_o δεν μπορεί να θεωρηθεί στατιστικά σημαντική και συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη διαδικασία των πολλαπλών συγκρίσεων για τον προσδιορισμό των πληθυσμών οι οποίοι διαφέρουν.

Αγνοώντας τον μικρό αριθμό περιπτώσεων ισοβαθμουσών παρατηρήσεων χρησιμοποιούμε την απλή μορφή:

$$S^2 = \frac{N(N+1)}{12} = 99.167$$

Άρα, $\frac{S^2(N-1-T)}{N-K} = \frac{99.167(33-25.464)}{34-4} = 24.911$

Οι υπόλοιποι υπολογισμοί δίνονται παρακάτω:

Πληθυσμοί	$\left\| \frac{R_i}{n_i} - \frac{R_j}{n_j} \right\|$	$2.041(24.911)^{1/2}\left(\frac{1}{n_i}+\frac{1}{n_j}\right)^{1/2}$
1 και 2	6.533	4.681
1 και 3	7.738	5.134
1 και 4	17.021	4.950
2 και 3	**14.271**	5.020
2 και 4	**10.488**	4.832
3 και 4	**24.759**	5.272

Σε όλες τις περιπτώσεις, οι τιμές στη δεύτερη στήλη υπερβαίνουν αυτές της τρίτης στήλης. Άρα, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η διαδικασία πολλαπλών συγκρίσεων δίνει ενδείξεις ότι όλα τα δυνατά ζεύγη πληθυσμών διαφέρουν.

Με την R: Το τεστ υλοποιείται με την εντολή: kruskal.test. Δίνουμε δύο διαφορετικούς τρόπους εισαγωγής των δεδομένων. Η δεύτερη ισοδύναμη μορφή μας βοηθάει να κάνουμε και το test πολλαπλών συγκρίσεων του Conover, με απαραίτητη την προσθήκη του πακέτου PMCMR.
Περιγραφικά μέτρα και τα boxplots ανά μέθοδο παρουσιάζονται με τη χρήση των δύο τελευταίων εντολών.

```
#DATA FROM XEKALAKI'S BOOK EXAMPLE#

a=c(83,91,94,89,89,96,91,92,90) # Method 1
b=c(91,90,81,83,84,83,88,91,89,84) # Method 2
c=c(101,100,91,93,96,95,94)  # Method 3
d=c(78,82,81,77,79,81,80,81) # Method 4
kruskal.test(list(a,b,c,d))

## Equivalent presentation of the data and Kruskal_Wallis test

x<-c(a, b, c, d)
g<-factor(rep(1:4, c(9, 10, 7, 8)),
          labels=c("Method 1",
                   "Method 2",
                   "Method 3",
                   "Method 4"))
kruskal.test(x,g)

#POST_HOC_MULTIPLE_COMPARISONS_TEST BY CONOVER

require(PMCMR)
posthoc.kruskal.conover.test(x, g, p.adjust.method="none")

plot(g,x) #boxplot for each method 1,2,3,4
tapply(x,g,summary) #basic summary statistics for each method 1,2,3,4
```

```
Kruskal-Wallis rank sum test

data:  list(a, b, c, d)
Kruskal-Wallis chi-squared = 25.629, df = 3, p-value = 1.141e-05

>
> ## Equivalent presentation of the data and Kruskal_Wallis test
>
> x<-c(a, b, c, d)
> g<-factor(rep(1:4, c(9, 10, 7, 8)),
+           labels=c("Method 1",
+                    "Method 2",
+                    "Method 3",
+                    "Method 4"))
> kruskal.test(x,g)

        Kruskal-Wallis rank sum test

data:  x and g
Kruskal-Wallis chi-squared = 25.629, df = 3, p-value = 1.141e-05

>
> #POST_HOC_MULTIPLE_COMPARISONS_TEST BY CONOVER
>
> require(PMCMR)
Loading required package: PMCMR
Warning message:
package 'PMCMR' was built under R version 3.3.3
> posthoc.kruskal.conover.test(x, g, p.adjust.method="none")

        Pairwise comparisons using Conover's-test for multiple
                          comparisons of independent samples

data:  x and g

         Method 1 Method 2 Method 3
Method 2 0.0071   -        -
Method 3 0.0040   1.9e-06  -
Method 4 6.4e-08  9.7e-05  8.8e-11

P value adjustment method: none
Warning message:
In posthoc.kruskal.conover.test.default(x, g, p.adjust.method = "none") :
  Ties are present. Quantiles were corrected for ties.
>
> plot(g,x) #boxplot for each method 1,2,3,4
> tapply(x,g,summary) #basic summary statistics for each method 1,2,3,4
$`Method 1`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  83.00   89.00   91.00   90.56   92.00   96.00

$`Method 2`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  81.00   83.25   86.00   86.40   89.75   91.00

$`Method 3`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  91.00   93.50   95.00   95.71   98.00  101.00

$`Method 4`
   Min. 1st Qu.  Median    Mean 3rd Qu.    Max.
  77.00   78.75   80.50   79.88   81.00   82.00
```