Γραμμική Άλγεβρα ΙΙ

Tutorial 11
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

18 Μαιου 2018

1. Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} -5 & b & a \\ -4 & 2 & a \\ -4 & b & 0 \end{bmatrix}$$

με τριπλή ιδιοτιμή το λ = -1. Να βρεθούν τα a, b
Λύση:
Το χαρ/κο πολυώνυμο του A είναι $P(x) = x^3 + 3x^2 + (4a + 4b - ab - 10)x + 3ab - 8a, \qquad P(-1) = 0,$

$$\Rightarrow (3 - b)1 - a) = 0$$

Επίσης, αφού είναι τριπλή ρίζα, θα έχουμε και οτι $P'(-1) = 0 \Rightarrow 4a + 4b - ab - 13 = 0 \Rightarrow a = 1, b = 3$

2. Εστω η συνάρτηση (τετραγωνική μορφή) $f(x, y) = 6x^2 - 4xy + 9y^2$
α) Να γραφτεί σε κανονική μορφή
β) Εαν $f(x, y) = 80$ να περιγράψετε το είδος της καμπύλης.
Λύση:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$f(x, y) = X^T AX$, ιδιοτιμές 5, 10.

$$A = PDP^{-1}. \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Επομένως, θέτοντας $X = PY$,

$$\frac{x'^2}{8} + \frac{y'^2}{16} = 1$$

έλλειψη.

3. Να γίνει παραγοντοποίηση QR του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 1 & 7 \\ -3 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

Λύση:
Κάνουμε Ορθοκανονικοποιήση $GramScmidt$ στις στήλες και παίρνουμε τον πίνακα

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \\ -\frac{3}{6} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{3}{6} \end{bmatrix}$$

επομένως $R = Q^T A = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

4. Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.3 \\ 0.4 & 1.2 \end{bmatrix}$$

Βρειτε ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα. Διαγωνοποιειται; Βρειτε τον A^k και το $\lim_{k\to\infty} A^k$.

Λυση:

Κατα τα συνηθη για τις ιδιοτιμές έχουμε

$$\det(A - \lambda) = 0 \Rightarrow \cdots \lambda = 1 \text{ και } \lambda = 0.6$$

Αν $\boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{v}$ τα δυο ιδιοδιανυσματα, απο τις σχεσεις $A\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{u}$ και $A\boldsymbol{v} = 0.6\boldsymbol{v}$ προκυπτει οτι δυο (απο τα απειρα) ιδιοδιανύσματα του πινακα A είναι τα

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας διαγωνοποιειται, δεδομένου οτι έχουμε 2 ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα και αρα μπορει να γραφτει στην μορφη

$$A = P\Delta P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Αρα για τον A^k έχουμε οτι

$$\begin{aligned} A^k = P\Delta^k P &= \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.6^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 + 6 \cdot 0.6^k & -3 + 3 \cdot 0.6^k \\ 4 - 4 \cdot 0.6^k & 6 - 2 \cdot 0.6^k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ετσι

$$\lim_{k\to\infty} A^k = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

◁