3 ΙΟΥΝΙΟΥ

R = πίνακας συσχέτισης

Σ = " διακύμανσης

$$\boxed{R = \Delta^{-1/2} \cdot \Sigma \cdot \Delta^{-1/2}}$$

$$\boxed{A = P \cdot B \cdot P^{-1}}$$

όχι όμοιοι

$$R = P^{-1} \cdot \Sigma \cdot P$$

Στην περίπτωση $R^{2\times 2}$ X, Y

$$R = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} X & Y \end{array} \\ & \left[\begin{array}{cc} 1 & r \\ r & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \end{array}$$

λ?

$$\det(R-\lambda I)=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & r \\ r & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)^2-r^2=0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda-r)(1-\lambda+r)=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda = 1-r \\ \lambda = 1+r \end{cases}$$

$$R=\begin{bmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(R) =$

$1-r^2=0$?

ποτε

R^{-1} δεν υπάρχει;

ΟΤΑΝ $r=\pm 1$

$\Leftrightarrow \Sigma^{-1}$ δεν υπάρχει.

ΤΟΤΕ:

$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ή $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

στήλες (γραμμές) όχι Γ.Α.

~~ή~~ (ΣΤΑΤ.) $r = \pm 1 \Rightarrow y = ax$

ΨΕΥΔΟΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟΣ

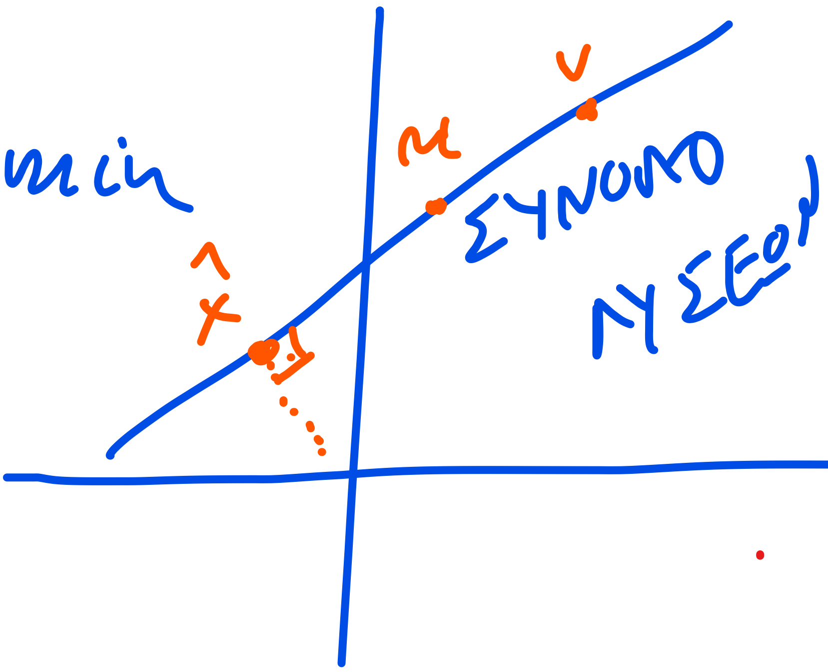
A^{+}: $\quad Ax = b \longrightarrow$

(ΟΤΑΝ A^{-1} δεν υπάρχει)

$$\hat{x} = A^+ b.$$

(Λ.Ε.Τ.) η λύση (από το γενικευμένο σύνολο λύσεων) με ελάχιστη norm

$$\|\hat{x}\| = \min$$



ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ ΛΥΣΕΩΝ: ($\breve{x}$)

$$\boxed{A x = \vec{b} \Rightarrow \breve{x} = A^+ \vec{b} + (I - A^+ A)\vec{\mu}}$$

($\vec{\mu}$ = ΤΥΧΑΙΟ)

random

Εφαρμογή σε επεξεργασία εικόνας

$\underline{A}$: εικόνα (RGB) : H =

θολώνει την εικόνα

$$B = H \cdot A \implies \hat{A} = H^{+} \cdot B$$

$B \downarrow$ θολή

$A \downarrow$ αρχική εικόνα

$$A^{+}A = P_{A^T}$$

$$AA^{+} = P_{A}$$

(ορθογώνιες προβολές)

• Αν A αντιστρέφεται $\Longrightarrow$

$$A^{-1} = A^{+}$$

• $(A^{+})^{+} = A \quad \left((A^{-1})^{-1} = A \right)$

• $(A^{T})^{+} = (A^{+})^{T} \quad \left((A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1} \right)$ όπως

~~πx 1~~

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow (2 \times 1)$

ουσιαστικά:
$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\|u\| = \sqrt{5}$

$A^{+} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$

(1×2)

Απόδειξη?

$AA^+A = A$

$A^+AA^+ = A^+$

$AA^+ =$ συμμετρ

$= A^+A$

Ορθογώνια προβολή :

$A \longrightarrow P_A$ στο σύνολο τιμών του

$$P_A = A \cdot A^+.$$

Για όλες τις προβολές: $(P)^+ = P$

ΠΩΣ ΤΟΝ ΥΠΟΛΟΓΙΖΩ;

SVD

$$\boxed{A = U \cdot \Sigma \cdot V^T} \Longrightarrow$$

σχεδόν διαγώνιος

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A^+ = V \cdot \Sigma^+ \cdot U^T}$$

$\sigma_i \to \frac{1}{\sigma_i}$, αν $\sigma_i \neq 0$.

<u>παράδειγμα</u>:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$

A^+? (3x2)

Θα κάνω SVD στον A:

$AA^T \longrightarrow$ ιδιοτιμές? ιδιοδιανύσμ.?

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda = 4, 1, 0$$

Αντίστοιχα ιδιοδ. στήλες,

κανονικοποιημένα $\rightarrow U$

$$U = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3\times 2)$$

$$A^TA : \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_i = 4, 1$$

(ίδιες ιδιοτιμές) ιδιοδιαν.? σε στήλες

$$V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Βρήκα $\quad A = U \Sigma V^T \Longrightarrow$

$$A^+ = V \cdot \underset{(2\times 3)}{\Sigma^+} \cdot U^T =$$

$$V \cdot \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot U^T =$$

$$\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0{,}433 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A^+$$

SHERMAN - MORRISON

A, A^{-1} γνωστούς.

A αλλάζει λίγο (διαταραχή)

$\Rightarrow$ A^{-1} ?

διαταραχή (πίνακας)

$A + E$ $\longrightarrow$ γινόμενο διανυσμάτων.

πχ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

(A^{-1})

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

A'^{-1} ?

$(A+B)^{-1}$?

ΟΧΙ

$$A + \underbrace{u \cdot v^T}_{\text{διαταραχή}}$$

$(\vec{u}, \vec{v})$

$$\boxed{(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} + \frac{\overbrace{A^{-1} \cdot uv^T \cdot A^{-1}}^{\text{ΠΙΝΑΚΑΣ}}}{\underbrace{1 + v^T \cdot A^{-1} \cdot u}_{\text{αριθμός}}}}$$

$$1 + v^T \cdot A^{-1} \cdot u$$

$$(1\times 1) + \underbrace{(1\times n)\cdot n\times n \cdot (n\times 1)}$$

$$1 + (1\times 1) = \text{αριθμός}$$

$$\boxed{\text{Η ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ JORDAN}}$$

Αν δεν διαγωνοποιείται ένας $A^{n\times n}$

$\Longrightarrow$ Το πιο κοντινό είναι η κ.μ. Jordan: $A = PJP^{-1}$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & \\ & & \lambda_2 & 1 & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ 0 & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix}$$

(Αντί για $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$)

Jordan Blocks:

μεγάλα blocks

Ιδιοτιμές:

$$J = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_1 & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_2 & \\ & \lambda_2 \end{matrix}} & \\ 0 & & \boxed{\lambda_3} \; \ddots \end{bmatrix}$$

3 μικρά.

μικρά blocks:

πχ 6x6

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 7 & 1 \\ & 7 \end{matrix}} & & & 0 \\ 0 & \boxed{7} & & \\ & & \boxed{7} & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

1 μικρό block

L

$\lambda = 7$: 4 φορές

ΕΛΑΧΙΣΤΟ:

$\boxed{(\lambda-7)^2 \cdot (\lambda-2)^2}$

<u>μικρά blocks</u>: Από το ελάχιστο πολυώνυμο (ΔΙΝΕΤΑΙ)