13 Απρ[illegible]

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ στο $\mathbb{R}^n$

$F(\vec{x}) = \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ = αριθμός.

$\uparrow$ $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^2$:

παραδείγματα:

$$F(x,y) = 3x^2 + 8xy + 2y^2$$

στο $\mathbb{R}^3$: $F(x,y,z) = 3x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - 9yz + 12xz$

$\mathbb{R}^n$ $F(x_1, x_2, x_3, \dots x_n) =$

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots a_n x_n^2 + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$$

πχ: $F(x,y) = 5x^2 + 8xy + 9y^2 + 2x$ ΟΧΙ

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ $\longrightarrow$

Γεωμετρία: κωνικές τομές

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ΕΛΛΕΙΨΗ
- $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ΥΠΕΡΒΟΛΗ $\mathbb{R}^2$
- $y^2 = 4ax$ παραβολή
- $x^2 + y^2 = R^2$ κύκλος

Τετρ. Μορφή

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots) = X^T A X \quad (\text{σαν πίνακας})$$

$$\boxed{A: n \times n, \quad A = A^T}$$

Αντιστοίχως $A^{n \times n}, \ A = A^T \Rightarrow$

υπάρχει $F(\vec{x}) = X^T \cdot A \cdot X$.

Πχ $$\boxed{F(x,y) = 2x^2 + y^2 - 6xy}$$

$X^T A X$, $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$X^T \cdot A \cdot X = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\underset{(1 \times 2)}{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}} \cdot \underset{(2 \times 1)}{\begin{bmatrix} 2x - 3y \\ -3x + y \end{bmatrix}} =$$

$(1,1)$

$$2x^2 - 3xy - 3xy + y^2 =$$

$$2x^2 - 6xy + y^2$$

$$F(x,y) = 25x^2 - 30xy + 9y^2 =$$

$$(5x - 3y)^2 =$$

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & -15 \\ -15 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = X^T A X$$

$\mathbb{R}^3$ $\quad Q(x,y,z) = \quad \boxed{X^T A X}$

$$x^2 - 3y^2 + z^2 - 4xy + 2yz + 6xz$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

π.χ. $Q(x,y) = x^2 + 5y^2 \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Διαγώνιος

Διαγωνοποίηση: $A = Q\Delta Q^{-1} = Q\Delta Q^T$

• $F(\vec{x}) = X^T A X =$ $\boxed{\text{Θέτω } \vec{x} = Q\vec{y}}$

$$(QY)^T A (QY) = Y^T \underbrace{Q^T A Q}_{\Delta} Y =$$

$$Y^T \Delta Y = Y^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix} Y =$$

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ της F(x)

πχ1 $F(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$

a) ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

b) Αν $F(x,y) = 8 \to$ γεωμετρική ερμηνεία?

ΛΥΣΗ a) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ Ιδιοτιμές:

$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$(3-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 2, \quad \lambda = 4$

Ιδιοδιανύσματα: $\lambda = 2$: $A\vec{u} = 2\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 2x \\ x + 3y = 2y \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ -k \end{pmatrix}$ πχ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\|u\| = \sqrt{2}$

$\lambda = 4$ $\quad A\vec{v} = 4\vec{v} \Rightarrow \dots \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix}x\\x\end{pmatrix}$

$\|v\| = \sqrt{2}$

$$\boxed{A = Q\Delta Q^T} \qquad \hat{Q} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}$$

όχι έτοιμος →

στήλες: μοναδιαία

$$Q = \begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

Θέτω $Y = QX$

$$F(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 4y_2^2$$

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ

της $F(x,y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2$ (*) $\quad 45^\circ$

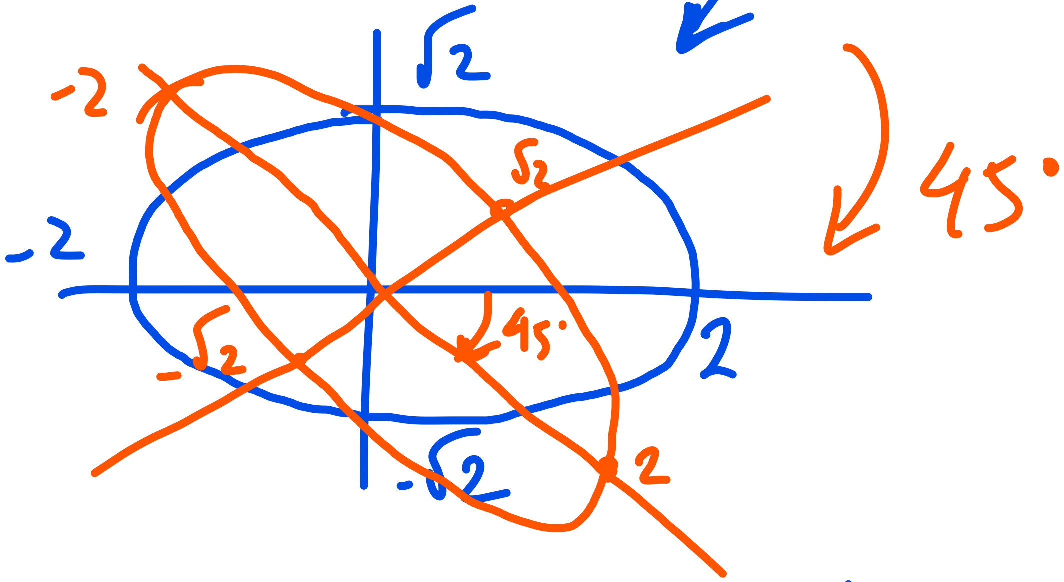
b) $f(x,y)=8 \Rightarrow$

$$2y_1^2+4y_2^2=8 \Rightarrow$$

$$\frac{y_1^2}{4}+\frac{y_2^2}{2}=1$$ ΕΛΛΕΙΨΗ

$a=2$ $\qquad$ $b=\sqrt{2}$

$\ast$



πολ/σιαμε $\cdot Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$\boxed{\text{στροφή}}$

πίνακας στροφής $= \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$

Προφανώς, $\varphi = 45°$ στροφή $45°$

πχ2 $\boxed{\text{στο } \mathbb{R}^3}$ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ ΣΤΟΝ ΧΩΡΟ

ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ?

$$F(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2yz$$

(xz λείπει) $= X^T A X$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

<u>Διαγωνοποίηση</u>: Ιδιοτιμές - Ιδιοδιανύσματα.

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

Sarrus:

$$\begin{matrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 & -1 & 2-\lambda \\ 0 & -1 & 3-\lambda & 0 & -1 \end{matrix}$$

$$(3-\lambda)^2(2-\lambda) - (3-\lambda) - (3-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\ldots \ \lambda = 3, \quad \lambda = 1, \quad \lambda = 4$$

$\underline{\lambda_1 = 1}$: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|u\| = \sqrt{6}$

$\underline{\lambda_3 = 4}$: $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|w\| = \sqrt{3}$

$\underline{\lambda_2 = 3}$: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad \|v\| = \sqrt{2}$

ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΩ : $\hat{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$, $\hat{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$\hat{w} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$A = Q \Delta Q^{T}$$

Θέτω
$$X = QY$$

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1/\sqrt{6} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

(για το σχήμα)

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$F(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = 1\hat{x}^2 + 3\hat{y}^2 + 4\hat{z}^2$$

(θέτω) (ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ)

$$\boxed{x^2 + 3y^2 + 4z^2 = C}$$

ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ

$(x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ σφαίρα$)$

έστω

Γενικά επιφάνεια $z = F(x, y)$

(θετικά ορισμένη)

$Z = f(x, y)$