Φροντιστήριο 12 ΜΑΙΟΥ

1 $f(x,y) = xy(2x+4y+1) = \boxed{2x^2y + 4xy^2 + xy}$

A $\frac{\partial f}{\partial x} = 4xy + 4y^2 + y = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 8xy + x = 0$

$$\begin{cases} y(4x+4y+1) = 0 \quad (1) \\ 2x^2+8xy+x = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$(1) \to y = 0$ ✓

$(1) \to x = \frac{-4y-1}{4}$

• Αν $y=0$: $2x^2+x=0 \to x=0$, $x=-\frac{1}{2}$

$O(0,0)$ $\quad A(-\frac{1}{2},0)$

• Αν $x = \frac{-4y-1}{4} \Rightarrow \boxed{x = -y - \frac{1}{4}}$ (3) στην (2)

$\rightarrow 2\left(-y-\frac{1}{4}\right)^2 + 8\left(-y-\frac{1}{4}\right)y - y - \frac{1}{4} = 0 \rightarrow$

$\ldots \quad -6y^2 - 2y - \frac{1}{8} = 0$

$\rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{12} \\ y = -\frac{1}{4} \end{cases}$ Στην (3) $\Rightarrow$ $x = -\frac{1}{6}$, $x = 0$

$B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) \quad \Gamma\left(0, -\frac{1}{4}\right)$

<u>4 κρίσιμα σημεία</u>: O, A, B, Γ

(B) Η $f'' \longrightarrow$ ΠΙΝΑΚΑΣ: H

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8x$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x + 8y + 1$$

$$H = \begin{bmatrix} 4y & 4x+8y+1 \\ 4x+8y+1 & 8x \end{bmatrix}$$

Γ) $O(0,0) \rightarrow H = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Αόριστος $\det H = -1 \rightarrow$ ΣΗΜΕΙΟ ΣΕΛΑΣ

$A(-\frac{1}{2}, 0) \rightarrow H = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

Αόριστος $\det H = 1$ ΣΗΜΕΙΟ ΣΕΛΑΣ

$B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) \rightarrow H = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & -4/3 \end{bmatrix}$

Αρνητ. Ορισμένος $\det H = \frac{1}{3} > 0$

$B = MAX$ *

$\Gamma\left(0, -\frac{1}{4}\right)$: $H = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\det H = -1 < 0$

Αόριστος $\rightarrow$ ΣΗΜΕΙΟ ΣΕΑΓ

Άρα 1 MAX $B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) \rightarrow$

$f_B = f\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right) =$

$$\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{12}\right)\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+1\right)=+\frac{1}{216}$$

$$B\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{216}\right) \ (3\text{-D})$$

---

2 Να βρεθεί το μέγιστο της $9x^2+4y^2+3z^2 = f(x,y,z)$

όταν $\|x\|=1$

πίνακας αντίστοιχος: $A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ ιδιοτιμές: $\lambda_1=9, \ \lambda_2=4, \ \lambda_3=3$

f_{max} για $\|x\|=1$ $= 9$

③ Γραμμικό μοντέλο:

$$\boxed{y = b_0 + b_1 x}$$

x	2	3	5	6
y	3	2	1	0

$$\boxed{AX = B} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$AX = B \Rightarrow A^T A X = A^T B$$

κανονική εξίσωση:

(ΠΑΝΤΑ ΕΧΕΙ ΛΥΣΗ)

$$\left(N(A^T) = R(A)^T \right)$$

($A^T A$ αντιστρέφεται αν ο A έχει γ.α. στήλες)

$$\boxed{X = (A^T A)^{-1} \underline{A^T B}} \quad *$$

• $$A^T A = \underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}} \underset{4\times 2}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 2}{\begin{bmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{bmatrix}}$$

και $$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 74 & -16 \\ -16 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T B = \underset{2\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}} \underset{4\times 1}{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}} = \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix}}.$$

Άρα $X = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 74 & -16 \\ -16 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 17 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} 4,3 \\ -0,7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow b_0 \\ \rightarrow b_1 \end{matrix}$$

$$\boxed{y = 4,3 - 0,7x}$$

---

4 Σωστό - Λάθος

(A) $A^{4\times4}$ ορθογώνιος $\rightarrow$ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ ;

$\boxed{A^T = A^{-1}}$

Λ

πχ $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ορθογώνιος

όχι $A = A^T$.

Β $f(x) = x^T A x$ τετρ. μορφή.

$f(x)$ μέγιστο $= \lambda_{max}$;

ΜΟΝΟ ΟΤΑΝ $\underline{\|x\| = 1}$

Γ Φασματικό θεώρημα:

Οι συμμετρικοί πίνακες διαγωνοποιούνται $\boxed{A = Q \Delta Q^T}$ ορθογώνια

Αν $A^{n \times n}$ διαγωνοποιείται ορθογώνια $\Rightarrow$ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΣ ? ?

(Θα δείξω $A^T = A$)

$$A^T = (Q\Delta Q^T)^T = (Q^T)^T \Delta^T Q^T =$$

$$Q\Delta Q^T = A$$

$$A = A^T \quad \Sigma$$

Δ Αν $Q =$ ορθογώνιος $\Rightarrow$

διαγωνοποιείται ορθογώνια;

Λ γιατί ορθογώνιοι όχι

συμμετρικοί πάντα

Ε $A =$ συμμετρικός $(A = A^T)$

Έστω μια ιδιοτιμή έχει 2 ιδιοδιανύσματα, $\vec{u}, \vec{v}$.

$$(\pi\chi\ \lambda=3) \quad \begin{cases} A\vec{u}=3\vec{u} \\ A\vec{v}=3\vec{v} \end{cases}$$

(ΠΙΘΑΝΟΝ $\lambda=3$ διπλή ρίζα του χαρ/κου πολυωνύμου)

$$\vec{u} \perp \vec{v}\ ?$$

1 τα ιδιοδιανύσματα συμμετρ. πινάκων είναι κάθετα μεταξύ τους όταν ανήκουν σε διαφορετικές ιδιοτιμές

5

Να κατασκευαστεί 2×2

Αντιστρέψιμος, ΜΗ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΗΣΙΜΟΣ

$\lambda_i \neq 0$

1 ιδιοδιάνυσμα

Διαγώνιος:

πχ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

1 ιδιοτιμή $\lambda=2$

det = 4 ✓

ΞΕΚΙΝΑΩ

$\sim \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

det = 4 ✓

1 ιδιοτιμή

$\lambda=2$

(διπλή)

Ιδιοδιανύσματα?

$$A\vec{u} = 2\vec{u} \to \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{cases} 2x+3y=2x \\ 2y=0 \end{cases} \to \begin{cases} y=0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{KER}$$

Άρα ΜΟΝΟ ΕΝΑ $\vec{u}$

ΔΕΝ ΔΙΑΓΩΝΟΠΟΙΕΙΤΑΙ

6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

α) Ιδιοτιμές, ιδιοδιαν., διαγωνοποίηση

$\underline{\lambda_i}$: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1, \quad \lambda = 4.$

$\underline{\vec{u}, \vec{v}}$: $A\vec{u} = 1\vec{u} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = x \\ x + 3y = y \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$A\vec{v} = 4\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 4x \\ x + 3y = 4y \end{cases} \rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Δ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

b) $\underline{A^6}$: $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1^6 & 0 \\ 0 & 4^6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix} =$

4096

γ) ΘΕΤΙΚΗ ΡΙΖΑ ΤΟΥ Α? $(X^2=A)$

$$X = A^{1/2} = P\Delta^{1/2}P^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{1} & 0 \\ 0 & \sqrt{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ \frac{1}{3} & 2/3 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4/3 & 2/3 \\ 1/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

δ) $\boxed{f(x) = x^4 - 3x^3 - 6x^2}$ $f(A)$?

$f(1) = -8$

$f(4) = 32$

$$f(A) = Pf(\Delta)P^{-1} =$$

$$P\begin{bmatrix} f(1) & 0 \\ 0 & f(4) \end{bmatrix}P^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$