Έλεγχοι υποθέσεων βασισμένοι στη Διωνυμική κατανομή

Μη Παραμετρική Στατιστική

Παναγιώτης Παπασταμούλης
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήμα Στατιστικής ΟΠΑ

papastamoulis@aueb.gr

2026

Περιεχόμενα: Έλεγχοι υποθέσεων βασισμένοι στη Διωνυμική κατανομή

Εισαγωγή

Πολλές φορές στην εφαρμοσμένη έρευνα μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε το ποσοστό ενός πληθυσμού που έχει ένα χαρακτηριστικό γνώρισμα.

Παραδείγματα:

- Ένας πολιτικός θέλει να γνωρίζει το ποσοστό των ψηφοφόρων που θα τον στηρίξουν.
- Ένας αναλυτής αγοράς εξετάζει το ποσοστό οικογενειών που θα αλλάξουν ηλεκτρική συσκευή.
- Οι φροντιστές υγείας μελετούν το ποσοστό ασθενών με συγκεκριμένη θεραπεία ή ασθένεια.

Διωνυμικά δεδομένα

Τα πειραματικά δεδομένα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

- Επιτυχία
- Αποτυχία

Μας ενδιαφέρει το ποσοστό επιτυχίας.

Τα δεδομένα αυτά αναλύονται με ελέγχους που βασίζονται στη **διωνυμική κατανομή**.

Διωνυμικός έλεγχος

Θεωρούμε δείγμα από n ανεξάρτητες δοκιμές Bernoulli.

Κάθε αποτέλεσμα ανήκει:

- είτε στην κατηγορία 1,
- είτε στην κατηγορία 2.

Έστω:

$$n_1 = \text{πλήθος παρατηρήσεων κατηγορίας } 1, \quad n_2 = n - n_1$$

Υποθέσεις

Για να εφαρμόσουμε τον διωνυμικό έλεγχο απαιτούνται:

(A1) Κάθε δοκιμή οδηγεί σε επιτυχία ή αποτυχία.

(A2) Η πιθανότητα επιτυχίας p είναι ίδια σε όλες τις δοκιμές.

(A3) Οι n δοκιμές είναι ανεξάρτητες.

Διαδικασία ελέγχου υποθέσεων

Η διαδικασία ελέγχου υποθέσεων θα παρουσιαστεί για:

- Δίπλευρα προβλήματα ελέγχου
- Μονόπλευρα προβλήματα ελέγχου

Δίπλευρο πρόβλημα ελέγχου

Έστω $p_0 \in [0, 1]$. Θέλουμε να ελέγξουμε:

$$\text{(A)} \quad H_0 : p = p_0 \ , \quad H_1 : p \neq p_0$$

σε επίπεδο σημαντικότητας a, με $0 < a < 1$.

Ορισμός μεταβλητών

Θεωρούμε $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. (Bernoulli δοκιμές), όπου:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{αν η } i\text{-οστή δοκιμή είναι επιτυχία} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ορίζουμε τη στατιστική συνάρτηση:

$$T = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

Τότε:

$$T \sim B(n, p)$$

Κανόνας απόφασης (δίπλευρος)

Αν παρατηρήσουμε n_1 επιτυχίες, τότε $T = n_1$. Απορρίπτουμε την H_0 αν:

$$T \leq c_1 \quad \text{ή} \quad T > c_2$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 καθορίζονται από το επίπεδο σημαντικότητας a.

Συνάρτηση ελέγχου

Ο έλεγχος μεγέθους a γράφεται:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & T \leq c_1 \text{ ή } T > c_2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

με:

$$P(T \leq c_1 \mid p = p_0) = a_1 \simeq \frac{a}{2}$$

$$P(T \leq c_2 \mid p = p_0) = 1 - a_2 \simeq 1 - \frac{a}{2}$$

και συνολικό επίπεδο:

$$a = a_1 + a_2$$

Μονόπλευρα προβλήματα ελέγχου

Συχνά μας ενδιαφέρει αν:

$$\text{(B)} \quad H_0 : p \leq p_0, \quad H_1 : p > p_0$$

ή:

$$\text{(Γ)} \quad H_0 : p \geq p_0, \quad H_1 : p < p_0$$

Έλεγχος τύπου (Β)

Απορρίπτουμε την H_0 αν:

$$T > c$$

Ο έλεγχος είναι:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & T > c \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

με:

$$P(T \leq c \mid p = p_0) \simeq 1 - a$$

Έλεγχος τύπου (Γ)

Απορρίπτουμε την H_0 αν:

$$T \leq c$$

Ο έλεγχος είναι:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & T \leq c \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

με:

$$P(T \leq c \mid p = p_0) \simeq a$$

Παρατήρηση

Οι σταθερές c_1, c_2, c υπολογίζονται μέσω της συνάρτησης κατανομής της Διωνυμικής κατανομής.

Λόγω της διακριτής φύσης της κατανομής της T, το πραγματικό επίπεδο σημαντικότητας συνήθως δεν είναι ακριβώς ίσο με a.

Ο έλεγχος είναι συχνά **συντηρητικός**.

Παράδειγμα 1

Σε ένα δείγμα 15 χαπιών μετρήσαμε την περιεκτικότητα ενός φαρμάκου σε ορισμένη δραστική ουσία και πήραμε τα παρακάτω δεδομένα σε mgr.

$$0.52,\ 0.82,\ 1.25,\ 1.9,\ 2.6,\ 3.86,\ 1.4,\ 1.97,\ 2.85,\ 3.9,\ 0.97,\ 1.5,\ 2.0,\ 2.95,\ 0.99.$$

Ελέγξτε, σε επίπεδο σημαντικότητας $a = 0.05$, αν το 30% των χαπιών έχει περιεκτικότητα τουλάχιστον 1.5 mgr.

Περιγραφή προβλήματος

Θεωρούμε την τ.μ. X_i, η οποία μετράει την περιεκτικότητα της δραστικής ουσίας στο i-οστό χάπι, για $i = 1, \ldots, 15$. Ορίζουμε τις (Bernoulli) τ.μ. Y_i ως:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & X_i \geq 1.5 \\ 0, & X_i < 1.5 \end{cases} \quad i = 1, \ldots, 15$$

Στατιστικό μοντέλο

Κάθε μεταβλητή :

$$Y_i \sim B(1, p)$$

όπου :

$$p = P(Y_i = 1) = P(X_i \geq 1.5)$$

Η στατιστική συνάρτηση είναι :

$$T = \sum_{i=1}^{15} Y_i \sim B(15, p)$$

Υποθέσεις ελέγχου

Θέλουμε να ελέγξουμε:

$$H_0 : p = 0.3 \quad \text{έναντι} \quad H_1 : p \neq 0.3$$

Πρόκειται για **δίπλευρο διωνυμικό έλεγχο**.

Κανόνας απόφασης

Ο έλεγχος δίνεται από:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & T \leq c_1 \text{ ή } T > c_2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

όπου οι σταθερές c_1, c_2 ικανοποιούν:

$$P(T \leq c_1 \mid p = 0.3) \simeq 0.025$$

$$P(T \leq c_2 \mid p = 0.3) \simeq 0.975$$

Υπολογισμός κρίσιμων τιμών

Από τους πίνακες της διωνυμικής κατανομής για $T \sim B(15, 0.3)$:

$$P(T \leq 1 \mid p = 0.3) = 0.0353$$

$$P(T \leq 8 \mid p = 0.3) = 0.9848$$

Οι τιμές αυτές είναι οι πλησιέστερες στα 0.025 και 0.975. Άρα:

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 8$$

Πραγματικό επίπεδο σημαντικότητας

Το πραγματικό επίπεδο είναι:

$$a = P(T \leq 1) + P(T > 8)$$

$$= 0.0353 + (1 - 0.9848)$$

$$= 0.0505$$

Άρα ο έλεγχος έχει επίπεδο σημαντικότητας περίπου 5.05%.

Τελικός έλεγχος

Ο έλεγχος γράφεται:

$$\phi(\underset{\sim}{x}) = \begin{cases} 1, & T \leq 1 \text{ ή } T > 8 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Από τα δεδομένα προκύπτει:

$$T = 9 > 8$$

Άρα **απορρίπτουμε** την H_0.

Σε επίπεδο σημαντικότητας 5.05%: Δεν μπορούμε να υποθέσουμε ότι το 30% των χαπιών έχει περιεκτικότητα τουλάχιστον 1.5 mgr.

p-values διωνυμικού ελέγχου

- Πρόβλημα (A): $p \neq p_0$

$$p\text{-τιμή} = \sum_{k \in \mathcal{K}} \binom{n}{k} p_0^k (1 - p_0)^{n-k}, \tag{1}$$

  όπου $\mathcal{K} = \{k : P(X = k|p = p_0) \leq P(X = \tau|p = p_0)\}$.

- Πρόβλημα (B): $H_1 : p > p_0$

$$p\text{-τιμή} = P(T \geqslant \tau \,|p = p_0\,). \tag{2}$$

- Πρόβλημα (Γ): $H_1 : p < p_0$

$$p\text{-τιμή} = P(T \leqslant \tau \,|p = p_0\,). \tag{3}$$

Παράδειγμα 2

Υπολογίστε την p-τιμή του ελέγχου που κατασκευάστηκε στο Παράδειγμα 2. Ποιο είναι το συμπέρασμά σας;

$$\tau = 9, \quad \text{με} \quad P(T = 9 | p = 0.3) \approx 0.0116$$

Από πίνακα διωνυμικής κατανομής: $\mathcal{K} = \{0, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$

k	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(T = k \| p = 0.3)$	0.0047	0.0305	0.0916	0.1700	0.2186	0.2061	0.1472	0.0811
$\mathrm{I}_{\{k \in \mathcal{K}\}}$	1	0	0	0	0	0	0	0

k	8	9	10	11	12	13	14	15
$P(T = k \| p = 0.3)$	0.0348	0.0116	0.0030	0.0006	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
$\mathrm{I}_{\{k \in \mathcal{K}\}}$	0	1	1	1	1	1	1	1

Επομένως

$$p\text{-τιμή} = \sum_{k \in \mathcal{K}} P(T = k | p = 0.3) \approx 0.0199.$$

Απορρίπτουμε την H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας 5%, εναντι της δίπλευρης εναλλακτικής.

Πρόταση 2.1

Για μεγάλες τιμές του μεγέθους δείγματος n *η στατιστική συνάρτηση* $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ *ακολουθεί, υπό τη μηδενική υπόθεση* $H_0 : p = p_0$, *προσεγγιστικά κανονική κατανομή με μέση τιμή* $\mathrm{E}(T) = np_0$ *και διακύμανση* $\mathrm{Var}(T) = np_0\,(1 - p_0)$, *δηλαδή ισχύει ότι:*

$$\frac{T - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}\,(0, 1)\,.$$

Κανονική προσέγγιση της Διωνυμικής

Όταν:

- το n είναι μεγάλο και το p είναι κοντά στο 0 ή στο 1, ή
- το n είναι πολύ μικρό (για οποιαδήποτε τιμή του p),

η διωνυμική κατανομή είναι έντονα λοξή και η κανονική προσέγγιση **δεν είναι ικανοποιητική**. Αντίθετα, η κανονική προσέγγιση είναι

ικανοποιητική όταν:

- το n είναι σχετικά μεγάλο και
- το p δεν είναι ούτε πολύ μικρό ούτε πολύ μεγάλο.

Στην πράξη χρησιμοποιείται ο *κανόνας του πέντε* (rule of five):

$$np \geq 5 \quad \text{και} \quad np(1-p) \geq 5$$

τότε η κανονική προσέγγιση της διωνυμικής θεωρείται ικανοποιητική.

Διόρθωση συνέχειας (continuity correction)

Όταν το Κ.Ο.Θ. χρησιμοποιείται για την προσέγγιση διακριτών τ.μ. από κανονική κατανομή, συνιστάται η χρήση **διόρθωσης συνέχειας**.

Λόγοι:

- Διακριτές τ.μ. λαμβάνουν μόνο συγκεκριμένες τιμές, ενώ συνεχείς μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή.
- Η απευθείας χρήση της κανονικής προσέγγισης μπορεί να δώσει πιθανότητα 0 για συγκεκριμένες τιμές διακριτής τ.μ.

Ιδέα διόρθωσης: προσθέτουμε ή αφαιρούμε 0.5 στην τιμή της διακριτής μεταβλητής.

Πιθανότητες με διόρθωση συνέχειας

Αν X είναι διακριτή τ.μ. με $\mathrm{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$, τότε:

$$P(X = a) \approx \Phi\left(\frac{a + 0.5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X \leq a) \approx \Phi\left(\frac{a + 0.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X \geq a) \approx 1 - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X > a) \approx 1 - \Phi\left(\frac{a + 0.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X < a) \approx \Phi\left(\frac{a - 0.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b + 0.5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - 0.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ η αθροιστική συνάρτηση της $\mathcal{N}(0, 1)$.

Διωνυμικός έλεγχος με κανονική προσέγγιση

Για $T \sim B(n, p_0)$, η στατιστική Z με διόρθωση συνέχειας είναι:

$$Z = \begin{cases} \frac{T-0.5-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}, & T > np_0 \\ \frac{T+0.5-np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}, & T \leq np_0 \end{cases}$$

Δίπλευρος έλεγχος:

$$\phi(\underset{\sim}{z}) = \begin{cases} 1, & |Z| > z_{a/2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad p\text{-τιμή} = \begin{cases} 2\Phi\left(\frac{\tau + 0.5 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right), & \tau \leq np_0 \\ 2\left[1 - \Phi\left(\frac{\tau - 0.5 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)\right], & \tau > np_0 \end{cases}$$

Μονόπλευροι έλεγχοι:

$$p\text{-τιμή}_{(\mathrm{B})} = \Phi\left(\frac{\tau - 0.5 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right), \quad p\text{-τιμή}_{(\Gamma)} = \Phi\left(\frac{\tau + 0.5 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right)$$

Παράδειγμα 3

Σύμφωνα με τον απλό νόμο της κληρονομικότητας του Mendel, η διασταύρωση μεταξύ φυτών δύο συγκεκριμένων γενοτύπων, ενδέχεται να οδηγήσει σε απογόνους, οι οποίοι σε ποσοστό 25% είναι νάνοι και σε ποσοστό 75% είναι κανονικοί. Σε ένα πείραμα, για να προσδιοριστεί κατά πόσο η υπόθεση του απλού νόμου του Mendel είναι εύλογη σε μία συγκεκριμένη περίπτωση, μία διασταύρωση οδήγησε σε απογόνους φυτά από τα οποία τα 243 ήταν νάνοι και τα 682 ήταν κανονικά. Πώς θα ερμηνεύατε τα αποτελέσματα του πειράματος αυτού σε επίπεδο σημαντικότητας ίσο με $a = 0.05$· Υπολογίστε την p-τιμή του παραπάνω ελέγχου.

$$H_0 : p = 0.25, \quad H_1 : p \neq 0.25$$

Κανονική προσέγγιση με διόρθωση συνέχειας: Επειδή $\tau = 243 > np_0 = 925 \cdot 0.25 = 231.25$, ορίζουμε

$$Z = \frac{T - 0.5 - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}.$$

Υπολογισμός:

$$z = \frac{243 - 0.5 - 231.25}{\sqrt{925 \cdot 0.25 \cdot 0.75}} = 0.8542$$

Απόφαση:

$$|z| = 0.8542 < z_{0.025} = 1.96 \quad \Rightarrow \quad \text{Δεν απορρίπτουμε την } H_0$$

Δηλαδή, δεν υπάρχουν σαφείς ενδείξεις να αμφισβητήσουμε τον απλό νόμο της κληρονομικότητας του Mendel.

p**-τιμή:**

$$p\text{-τιμή} = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{243 - 0.5 - 231.25}{\sqrt{925 \cdot 0.25 \cdot 0.75}}\right)\right) = 2(1 - \Phi(0.8542)) \approx 0.392$$

Διωνυμικός έλεγχος για ποσοστιαία σημεία συνεχούς κατανομής

Προβλήματα ελέγχου ποσοστιαίων σημείων

Έστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κατανομή με α.σ.κ. F_X και x^* γνωστή τιμή.

Προβλήματα ελέγχου ποσοστιαίων σημείων:

$$\text{(A)}\; H_0 : x_{p^*} = x^*, \quad H_1 : x_{p^*} \neq x^*$$
$$\text{(B)}\; H_0 : x_{p^*} \leq x^*, \quad H_1 : x_{p^*} > x^*$$
$$\text{(Γ)}\; H_0 : x_{p^*} \geq x^*, \quad H_1 : x_{p^*} < x^*$$

Όπου x_{p^*} είναι το p^*-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής F_X.

Συνεχής περίπτωση

Όταν $X \sim F_X$ είναι συνεχής, $P(X = x_p) = 0$, και:

$$P(X > x_p) = p.$$

Ορίζουμε τ.μ.:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & X_i > x^* \\ 0, & X_i \leq x^* \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Τότε $Y_i \sim B(1, p)$ με $p = P(X_i > x^*)$.

Διπλευροί και μονόπλευροι έλεγχοι

Δίπλευρο πρόβλημα (Α'):

$$H_0 : p = p_0, \quad H_1 : p \neq p_0$$

Στατιστική συνάρτηση:

$$T = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \#\{X_i > x^*\}$$

Περιοχή απόρριψης:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & T \leq c_1 \text{ ή } T > c_2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$P(T \leq c_1 | p = p_0) \simeq a/2, \quad P(T \leq c_2 | p = p_0) \simeq 1 - a/2$$

και p-τιμή $= \sum_{k \in \mathcal{K}} \binom{n}{k} p_0^k (1-p_0)^{n-k}$ όπου
$\mathcal{K} = \{k : P(T = k | p = p_0) \leq P(T = \tau | p = p_0)\}$.

Μονόπλευροι έλεγχοι (Β΄) και (Γ΄)

Πρόβλημα (Β΄): $H_0 : p \leq p_0,\ H_1 : p > p_0$ Κρίσιμη περιοχή: $T > c$, c από $P(T \leq c|p = p_0) = 1 - a$ p-τιμή: p-τιμή $= P(T \geq \tau|p = p_0)$

Πρόβλημα (Γ΄): $H_0 : p \geq p_0,\ H_1 : p < p_0$ Κρίσιμη περιοχή: $T \leq c$, c από $P(T \leq c|p = p_0) = a$ p-τιμή: p-τιμή $= P(T \leq \tau|p = p_0)$

Όλοι οι έλεγχοι βασίζονται στο πλήθος των X_i που υπερβαίνουν x^*, δηλαδή $T = \sum Y_i$.

Παράδειγμα 4

Μια μελέτη, που έγινε πριν από 10 χρόνια, αναφέρει ότι το 40% του ενεργού πληθυσμού εργαζόταν τουλάχιστον 9 ώρες ημερησίως. Σε ένα τωρινό τυχαίο δείγμα ενηλίκων αναφέρονται οι μέσοι χρόνοι εργασίας την ημέρα ως ακολούθως:

$$8.2\ ,\ \ 9.3\ ,\ \ 6.6\ ,\ \ 7.4\ ,\ \ 8.8\ ,\ \ 5.2\ ,\ \ 9.1\ ,\ \ 6.8,\ \ 9.5,\ \ 4.4,\ \ 9,\ \ 6.2.$$

Χρησιμοποιήστε τον έλεγχο ποσοστιαίων σημείων για να ελέγξετε, σε ε.σ. μικρότερο του 2%, αν σήμερα το 40% του ενεργού πληθυσμού εργάζεται όπως και 10 χρόνια πριν ή λιγότερο.

Λύση

Πρόβλημα: Ορίζουμε την τ.μ. X ως τις ημερήσιες ώρες εργασίας ενός ενήλικα. Έστω $x_{0.40}$ το 40% ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της X. Θέλουμε να ελέγξουμε αν οι ενήλικες σήμερα εργάζονται όπως και 10 χρόνια πριν:

$$H_0 : x_{0.40} \geq 9, \quad H_1 : x_{0.40} < 9$$

Δείγμα: $n = 12$ παρατηρήσεις.

Μετατροπή σε διωνυμικό πρόβλημα

Ορίζουμε τ.μ.:

$$Y_i = \begin{cases} 1, & X_i > 9 \\ 0, & X_i \leq 9 \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, 12$$

Τότε $Y_i \sim B(1, p)$ με $p = P(X_i > 9)$.
Το αντίστοιχο διωνυμικό πρόβλημα:

$$H_0 : p \geq 0.40, \quad H_1 : p < 0.40$$

Στατιστική συνάρτηση:

$$T = \sum_{i=1}^{12} Y_i = \#\{X_i > 9\}$$

Υπολογισμός κρίσιμης τιμής και απόφασης

Από τα δεδομένα: $\tau = 3$.
Η σταθερά c καθορίζεται από:

$$P(T \leq c \mid p = 0.4) = a$$

Υπό H_0, $T \sim B(12, 0.4)$. Από τον Πίνακα:
$P(T \leq 1) = 0.0196 \approx a = 0.02 \implies c = 1$

Απόφαση:

$$\tau = 3 > 1 = c \implies \text{Δεν απορρίπτουμε } H_0$$

Συμπέρασμα: Δεν υπάρχουν σαφείς ενδείξεις για να απορριφθεί η υπόθεση ότι το 40% του ενεργού πληθυσμού εργάζεται όπως και πριν 10 χρόνια.

Προσημικός έλεγχος (Sign Test)

- Μπορεί να ελέγξει:
  - Αν η διάμεσος της διαφοράς $X - Y$ είναι μηδέν (για ζεύγη ποσοτικών μεταβλητών).
  - Αν η διάμεσος ενός πληθυσμού διαφέρει από μια καθορισμένη τιμή (με βάση ένα τυχαίο δείγμα απο τον πληθυσμό).
- Λιγότερες υποθέσεις για τις κατανομές σημαίνει γενική εφαρμοσιμότητα, αλλά μικρότερη στατιστική ισχύ.
- Εναλλακτικά, για αριθμητικά δεδομένα, το paired t-test ή το Wilcoxon signed-rank test έχουν μεγαλύτερη ισχύ, αλλά απαιτούν αυστηρότερες υποθέσεις.

Προβλήματα ενδιαφέροντος

Τα κύρια προβλήματα για τον έλεγχο της διάμεσου m είναι:

$$\text{(A) } H_0 : m = m_0, \quad H_1 : m \neq m_0$$

$$\text{(B) } H_0 : m \leqslant m_0, \quad H_1 : m > m_0$$

$$\text{(Γ) } H_0 : m \geqslant m_0, \quad H_1 : m < m_0$$

Ορίζουμε τυχαίες μεταβλητές:

$$Z_i = \begin{cases} 1, & X_i > m_0 \ (+) \\ 0, & X_i < m_0 \ (-) \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, n$$

Τότε $Z_1, \ldots, Z_n \sim B(1, p)$ με $p = P(X_i > m_0)$.

Ο αριθμός των θετικών διαφορών:

$$T = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

Υπό $H_0 : m = m_0$:

$$P(X > m_0) = P(X < m_0) = 0.5 \quad \Rightarrow \quad T \sim B(n, 0.5)$$

Άρα, η κατανομή της T είναι γνωστή και ανεξάρτητη της άγνωστης παραμέτρου m.

Μετατροπή σε προβλήματα διωνυμικού ελέγχου

Ανάλογα με το πρόβλημα αρχικά:

$$\text{(A)}\ H_0 : p = 0.5,\ \ H_1 : p \neq 0.5$$

$$\text{(B)}\ H_0 : p \leq 0.5,\ \ H_1 : p > 0.5$$

$$\text{(Γ)}\ H_0 : p \geq 0.5,\ \ H_1 : p < 0.5$$

Η στατιστική T μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τους ελέγχους αυτούς.

Έλεγχος μεγέθους a για πρόβλημα (A)

Ο έλεγχος δίπλευρου προβλήματος:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & T \leq c_1 \text{ ή } T > c_2 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Οι σταθερές c_1 και c_2 υπολογίζονται από:

$$P(T \leq c_1 \mid p = 0.5) = a_1 \simeq a/2, \quad P(T \leq c_2 \mid p = 0.5) = 1 - a_2 \simeq 1 - a/2$$

p-τιμή:

$$p\text{-τιμή} = \begin{cases} 2P(T \leq \tau \mid p = 0.5), & \tau \leq n/2 \\ 2P(T \geq \tau \mid p = 0.5), & \tau > n/2 \end{cases}$$

Έλεγχος μεγέθους a για προβλήματα (Β) και (Γ)

Πρόβλημα (Β): μονόπλευρο δεξιά

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & T > c \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad P(T \leq c \mid p = 0.5) = 1 - a$$

p-τιμή: $P(T \geq \tau \mid p = 0.5)$

Πρόβλημα (Γ): μονόπλευρο αριστερά

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & T \leq c \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}, \quad P(T \leq c \mid p = 0.5) = a$$

p-τιμή: $P(T \leq \tau \mid p = 0.5)$

Διόρθωση συνέχειας

Χρησιμοποιώντας τη διόρθωση συνέχειας, η στατιστική συνάρτηση είναι:

$$Z = \begin{cases} \dfrac{T - 0.5 - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}, & T > n/2 \\ \dfrac{T + 0.5 - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}, & T < n/2 \end{cases}$$

- T = αριθμός θετικών διαφορών
- n = πλήθος παρατηρήσεων
- Διωνυμικό πρόβλημα $B(n, 0.5)$ προσεγγίζεται με κανονική κατανομή.

Δίπλευρο πρόβλημα (A) - Έλεγχος μεγέθους a

$$H_0 : p = 0.5, \quad H_1 : p \neq 0.5$$

Έλεγχος:

$$\phi(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1, & |Z| > z_{a/2} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

p-τιμή:

$$p\text{-τιμή} = \begin{cases} 2\,\Phi\Big(\dfrac{\tau + 0.5 - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}\Big), & \tau \leq n/2 \\ 2\Big[1 - \Phi\Big(\dfrac{\tau - 0.5 - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}\Big)\Big], & \tau > n/2 \end{cases}$$

Μονόπλευρο πρόβλημα (B) - Δεξιά ουρά

$$H_0 : p \leq 0.5, \quad H_1 : p > 0.5$$

Έλεγχος:

$$\phi(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1, & Z > z_a \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

p-τιμή:

$$p\text{-τιμή} = \Phi\left(\frac{\tau - 0.5 - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right)$$

Μονόπλευρο πρόβλημα (Γ) - Αριστερή ουρά

$$H_0 : p \geq 0.5, \quad H_1 : p < 0.5$$

Έλεγχος:

$$\phi(\mathbf{z}) = \begin{cases} 1, & Z < -z_a \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

p-τιμή:

$$p\text{-τιμή} = \Phi\left(\frac{\tau + 0.5 - 0.5n}{\sqrt{0.25n}}\right)$$

Παράδειγμα 5

Στον πίνακα που ακολουθεί καταγράφεται ο αριθμός των σελίδων 24 τυχαία επιλεγμένων βιβλίων από μία βιβλιοθήκη ενός Τμήματος Μαθηματικών. Αφού κάνετε τις κατάλληλες υποθέσεις, να ελέγξετε, σε ε.σ. 5%, την υπόθεση ότι ο μέσος αριθμός των σελίδων είναι ίσος με 220 σελίδες χρησιμοποιώντας

α) τον ακριβή τρόπο ελέγχου του προσημικού τεστ,

β) τον προσεγγιστικό τρόπο ελέγχου με την κατάλληλη διόρθωση συνέχειας.

153 166 181 192 244 248 258 264 296 305 305 312 330
340 356 361 395 427 433 467 544 551 625 783.

Υπόθεση για τη διάμεσο

Έχουμε ένα τυχαίο δείγμα

$$X_1, \ldots, X_{24}$$

από πληθυσμό με συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής F_X.
Θέτουμε τη μηδενική υπόθεση:

$$H_0 : m = 220 \quad \text{και} \quad H_1 : m \neq 220$$

Υποθέτουμε ότι τα δεδομένα προέρχονται από συμμετρικό πληθυσμό.

Στατιστική συνάρτηση T - Προσημικό τεστ

Ορίζουμε τη στατιστική T ως τον αριθμό των θετικών διαφορών:

$$T = \#\{X_i - 220 > 0\}, \quad i = 1, \ldots, 24$$

Παρατηρήσεις:

- 4 παρατηρήσεις μικρότερες από 220: 153, 166, 181, 192
- 20 παρατηρήσεις μεγαλύτερες από 220

Υπό H_0, $T \sim B(n = 24, p = 0.5)$.

Κριτήριο απόρριψης

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται για:

$$T \leq c \quad \text{ή} \quad T \geq n - c$$

Με χρήση `R`:

$$\texttt{pbinom(6, 24, 0.5)} = 0.0113 \leq 0.025 \implies c = 6$$

Άρα:

$$n - c = 24 - 6 = 18$$

Παρατηρούμε ότι $\tau = 20 > n - c = 18 \implies$ απορρίπτουμε H_0 σε επίπεδο 5%.

Ακριβές επίπεδο σημαντικότητας

Το ακριβές επίπεδο ελέγχου:

$$a = P(T \leq 6) + P(T \geq 18) = 2P(T \leq 6) = 2 \cdot 0.011 \approx 0.022$$

p-τιμή υπολογίζεται ως:

$$p\text{-τιμή} = 2P(T \geq 20 \mid p = 0.5) = 2(1 - P(T \leq 19 \mid p = 0.5)) \approx 0.0015$$

Κανονική πρόσεγγιση με διόρθωση συνέχειας

Χρησιμοποιώντας τη διόρθωση συνέχειας:

$$Z = \frac{T - 0.5 - 0.5n}{\sqrt{0.25n}} \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \text{υπό } H_0$$

Για $T = 20$ και $n = 24$:

$$z = \frac{20 - 0.5 - 0.5 \cdot 24}{\sqrt{0.25 \cdot 24}} = \frac{7.5}{\sqrt{6}} = 3.06$$

Κριτήριο απόρριψης:

$$|Z| \geq z_{0.025} = 1.96$$

Συμπέρασμα: H_0 απορρίπτεται.

Ο Προσημικός Έλεγχος για Ζεύγη Παρατηρήσεων

Συχνά, ο προσημικός έλεγχος χρησιμοποιείται όταν διαθέτουμε ζεύγη παρατηρήσεων

$$(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$$

και θέλουμε να διαπιστώσουμε αν:

- Το πλήθος των περιπτώσεων όπου $X_i > Y_i$ είναι ίσο, μεγαλύτερο ή μικρότερο από
- Το πλήθος των περιπτώσεων όπου $Y_i > X_i$

Παράδειγμα: Ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε αν για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$X_i > Y_i \quad \text{ή} \quad X_i < Y_i$$

Σημείωση: Αυτό μπορεί να εκφραστεί ως έλεγχος υποθέσεων:

$$H_0 : P(X \leq x) \geq P(Y \leq x) \quad \text{για όλα τα } x \in \mathbb{R}$$

$$H_1 : P(X \leq x) < P(Y \leq x) \quad \text{για τουλάχιστον ένα } x \in \mathbb{R}$$

Ζεύγη τυχαίων παρατηρήσεων

- Θεωρούμε τυχαίο δείγμα $(X_1, Y_1), \ldots, (X_k, Y_k)$ από διδιάστατο πληθυσμό (X, Y).
- Τα X_i, Y_i είναι συνήθως εξαρτημένες τ.μ.
- Αν είναι ανεξάρτητες, προτιμάται ο έλεγχος Mann-Whitney λόγω μεγαλύτερης ισχύος.
- Η μέθοδος βασίζεται στο πρόσημο της διαφοράς $X_i - Y_i$:
  - $X_i - Y_i > 0 \implies +$
  - $X_i - Y_i < 0 \implies -$
  - $X_i - Y_i = 0 \implies$ εξαιρείται από το δείγμα
- Το νέο μέγεθος δείγματος: $n \leq k$.
- Αρκεί οι τιμές να είναι διατάξιμες (ordinal).

Προβλήματα ελέγχου για ζευγαρωτά δείγματα

(Α) $H_0 : \mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y), \quad H_1 : \mathrm{E}(X) \neq \mathrm{E}(Y)$

(Β) $H_0 : \mathrm{E}(X) \leq \mathrm{E}(Y), \quad H_1 : \mathrm{E}(X) > \mathrm{E}(Y)$

(Γ) $H_0 : \mathrm{E}(X) \geq \mathrm{E}(Y), \quad H_1 : \mathrm{E}(X) < \mathrm{E}(Y)$

Αρχική μορφή ελέγχων

Για κάθε ζεύγος (X_i, Y_i):

(Α) $H_0 : P(X_i < Y_i) = P(X_i > Y_i), \;\; H_1 : P(X_i < Y_i) \neq P(X_i > Y_i)$

(Β) $H_0 : P(X_i < Y_i) \leq P(X_i > Y_i), \;\; H_1 : P(X_i < Y_i) > P(X_i > Y_i)$

(Γ) $H_0 : P(X_i < Y_i) \geq P(X_i > Y_i), \;\; H_1 : P(X_i < Y_i) < P(X_i > Y_i)$

Ισχύει για τουλάχιστον ένα i.

Παράδειγμα 6

Μερικοί ερευνητές ισχυρίζονται ότι η ευπάθεια στην ύπνωση μπορεί να βελτιωθεί μέσω της εκπαίδευσης. Για να ερευνήσουμε αυτόν τον ισχυρισμό, μετρήσαμε για έξι άτομα και σε κλίμακα 1-20 την αρχική ευπάθεια στην ύπνωση και, κατόπιν, εκπαιδεύσαμε τα ίδια άτομα για 4 εβδομάδες. Μετά από την περίοδο εκπαίδευσης, κάθε άτομο μετρήθηκε ξεχωριστά και στην ίδια κλίμακα. Στις παρακάτω μετρήσεις, μεγαλύτεροι αριθμοί αναπαριστούν μεγαλύτερη ευπάθεια στην ύπνωση. Διεξάγοντας έναν έλεγχο προσήμου (sign test) πιστεύετε ότι αυτά τα δεδομένα επιβεβαιώνουν τον παραπάνω ισχυρισμό;

Άτομο	1	2	3	4	5	6
Πριν	10	16	7	4	7	2
Μετά	18	19	11	3	5	3

Ο έλεγχος να γίνει με χρήση κατάλληλης κρίσιμης περιοχής, για ε.σ. 10%, αλλά και με χρήση της p-τιμής του παραπάνω ελέγχου.

Πρόβλημα

Θεωρούμε δύο τυχαίες μεταβλητές:

- X: ευπάθεια στην ύπνωση πριν την εκπαίδευση
- Y: ευπάθεια στην ύπνωση μετά την εκπαίδευση

Στόχος: Να εξετάσουμε αν η ευπάθεια στην ύπνωση **βελτιώνεται**, δηλαδή αν οι τιμές μετά την εκπαίδευση είναι μικρότερες.

Ορισμός μεταβλητών για τον έλεγχο

Ορίζουμε:

$$Z_i = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_i > Y_i \ (+) \\ 0, & \text{αν } X_i < Y_i \ (-) \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, 6$$

- $Z_1, \ldots, Z_6 \sim B(1, p)$ με πιθανότητα επιτυχίας $p = P(X_i > Y_i)$
- Στατιστική συνάρτηση: $T = \sum_{i=1}^{6} Z_i$

Μορφή ελέγχου

$$H_0 : p \leqslant 0.5, \quad H_1 : p > 0.5$$

- Αν απορρίψουμε την H_0, η ευπάθεια στην ύπνωση βελτιώνεται. - Κρίσιμη περιοχή:

$$K : T > c, \quad c \text{ από } P(T \leq c \mid p = 0.5) \approx 1 - a$$

Υπολογισμός κρίσιμης περιοχής

- Δείγμα: $\tau = 2$
- Διωνυμική κατανομή: $T \sim B(6, 0.5)$
- Από τον πίνακα: $P(T \leq 4) = 0.8906 \approx 0.90 \Rightarrow c = 4$
- Ακριβές μέγεθος ελέγχου: $a = 0.1094$

Συμπέρασμα: $\tau = 2 < c = 4 \Rightarrow$ δεν απορρίπτουμε την H_0.

Υπολογισμός p-τιμής

Η p-τιμή δίνεται από:

$$\begin{aligned} p\text{-τιμή} &= P(T \geq 2 \mid p = 0.5) = 1 - P(T \leq 1 \mid p = 0.5) \\ &= 1 - 0.1094 = 0.8906 \end{aligned}$$

Συμπέρασμα: Δεν υπάρχουν ισχυρές ενδείξεις για βελτίωση της ευπάθειας στην ύπνωση σε επίπεδο σημαντικότητας 10%.

Παραλλαγές του Προσημικού ελέγχου

Ο προσημικός έλεγχος μπορεί να προσαρμοστεί κατάλληλα και να εφαρμοστεί στις εξής περιπτώσεις:

- Έλεγχος διαφοράς σε συσχετισμένα ποσοστά (McNemar)
- Έλεγχος ύπαρξης τάσης (Cox-Stuart)
- Έλεγχος συσχετίσεων (Cox-Stuart)

Δες Κεφάλαιο 5: Μπατσίδης, Παπασταμούλης, Πετρόπουλος και Ρακιτζής (2022). Μη Παραμετρική Στατιστική.