

Άσκηση 1. Έστω δύο προϊόντα A και B με τα ίδια χαρακτηριστικά. Κάποιος επιθυμεί να ελέγξει αν το B προτιμάται έναντι του A:

H_0 : το B τείνει να μην προτιμάται έναντι του A

H_1 : το B τείνει να προτιμάται έναντι του A.

Για τον σκοπό αυτό, επιλέγει τυχαίο δείγμα 10 καταναλωτών που δοκιμάζουν τα 2 προϊόντα. Από τους 10 καταναλωτές, οι 7 προτιμούν το B και τρεις προτιμούν το A. Σε τι συμπέρασμα καταλήγετε σε επίπεδο σημαντικότητας 5%;

Άσκηση 2. Ένας νευρολόγος διερευνά την καταθλιπτική επίδραση διάφορων ναρκωτικών. Αφού συγκέντρωσε 20 εθελοντές clubbers, έδωσε στους 10 MDMA και στους υπόλοιπους 10 αλκοόλ τα οποία κατανάλωσαν (και μόνο αυτά) κατά τη Σαββατιάτικη έξοδό τους. Κατόπιν, μέτρησε τα επίπεδα κατάθλιψης χρησιμοποιώντας το ψυχομετρικό τεστ Beck Depression Inventory (BDI) την αμέσως επόμενη μέρα (Κυριακή) και λίγες μέρες μετά (Τετάρτη) από την κατανάλωση του ναρκωτικού (μεγάλες τιμές στον δείκτη BDI φανερώνουν κατάθλιψη). Τα αποτελέσματα παρατίθενται στον ακόλουθο πίνακα.

Clubber	Ναρκωτικό	BDI (Κυριακή)	BDI (Τετάρτη)
1	MDMA	15	28
2	MDMA	35	35
3	MDMA	16	35
4	MDMA	18	24
5	MDMA	19	39
6	MDMA	17	32
7	MDMA	27	27
8	MDMA	16	29
9	MDMA	13	36
10	MDMA	20	35
11	αλκοόλ	16	5
12	αλκοόλ	15	6
13	αλκοόλ	20	30
14	αλκοόλ	15	8
15	αλκοόλ	16	9
16	αλκοόλ	13	7
17	αλκοόλ	14	6
18	αλκοόλ	19	17
19	αλκοόλ	18	3
20	αλκοόλ	18	10

1. Για κάθε γκρουπ ξεχωριστά, ελέγξτε σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$ αν υπάρχει διαφορά μεταξύ των δεικτών BDI Κυριακής και Τετάρτης. Τι συμπέρασμα βγάξετε για την κατεύθυνση της επίδρασης κάθε ναρκωτικού;
2. Ελέγξτε σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$ αν υπάρχει διαφορά στην καταθλιπτική επίδραση μεταξύ των δύο ναρκωτικών παραπάνω, μέσω του δείκτη BDI (Τετάρτη).

Άσκηση 3. Έστω ο έλεγχος της $H_0 : \theta \in \Theta_0$ έναντι της $H_1 : \theta \in \Theta_1$ σε επίπεδο σημαντικότητας α , όπου $\Theta_0 \cap \Theta_1 = \emptyset$. Η ισχύς ενός ελέγχου, για δοθέν $\theta \in \Theta_1$, ορίζεται ως η

πιθανότητα ορθής απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή:

$$\begin{aligned} \text{ισχύς}_\theta &= P(\text{απόρριψη } H_0 | \eta \text{ } H_1 \text{ είναι αληθής}) \\ &= P(\text{ελεγχουσυνάρτηση} \in C_\alpha | H_1) \end{aligned}$$

όπου C_α η περιοχή απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, σε επίπεδο σημαντικότητας α . Έστω ότι προσομοιώνονται M δείγματα από την εναλλακτική υπόθεση για ένα συγκεκριμένο $\theta \in \Theta_1$. Η Monte Carlo εκτίμηση της ισχύος (για το συγκεκριμένο $\theta \in \Theta_1$) είναι

$$\widehat{\text{ισχύς}}_\theta = \frac{\text{αριθμός απορρίψεων της } H_0 \text{ στα } M \text{ προσομοιωμένα δείγματα}}{M}.$$

Θεωρήστε τώρα τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \mu_X \geq \mu_Y \quad \text{έναντι της} \quad H_1 : \mu_X < \mu_Y$$

όπου μ_X και μ_Y συμβολίζει τη μέση τιμή της κατανομής ανεξάρτητων τυχαίων δειγμάτων $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ και $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ μεγέθους n . Για $n = 5, \dots, 30$

1. Προσομοιώστε δείγμα x (μεγέθους n) από την κατανομή t_2 , μέσω της εντολής
`x <- rt(n = n, df = 2, ncp = 0)`
2. Προσομοιώστε δείγμα y (μεγέθους n) από την κατανομή $t_2(2)$ (κατανομή t_2 με παράμετρο θέσης 2), μέσω της εντολής
`y <- rt(n = n, df = 2, ncp = 2)`
3. Ελέγξτε την παραπάνω υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 5\%$, χρησιμοποιώντας t -test και τον έλεγχο Mann-Whitney, μέσω των εντολών
`t.test(x, y, alternative = "less", var.equal = TRUE)`
`wilcox.test(x, y, paired = FALSE, alternative = "less", exact = T)`
Υπόδειξη: Τα p-value των ελέγχων επιστρέφονται μέσω των εντολών
`t.test(...)$p.value`
`wilcox.test(...)$p.value`
4. Επαναλάβετε την παραπάνω διαδικασία $M = 2000$ φορές και καταγράψτε την σχετική συχνότητα απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης, για κάθε έναν από τους δύο ελέγχους (αυτό είναι η Monte Carlo εκτίμηση της ισχύος).

Συγκεντρώστε τις εκτιμήσεις ισχύος που προκύπτουν από την μελέτη σας σε έναν πίνακα διάστασης 10×2 όπου στις γραμμές αντιστοιχεί το μέγεθος δείγματος ($n = 3, \dots, 12$) και στις στήλες ο τύπος του τεστ (1η στήλη t -test, 2η στήλη Mann-Whitney). Απεικονίστε επίσης σε ένα κοινό διάγραμμα τα αποτελέσματα του πίνακα. Τι παρατηρείτε; Είναι αναμενόμενο;