Παρουσίαση μαθήματος

Μη Παραμετρική Στατιστική

Παναγιώτης Παπασταμούλης
Αναπληρωτής Καθηγητής
Τμήμα Στατιστικής ΟΠΑ

papastamoulis@aueb.gr

2026

ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ATHENS UNIVERSITY OF ECONOMICS AND BUSINESS

ΣΧΟΛΗ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΤΗΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ
SCHOOL OF INFORMATION SCIENCES & TECHNOLOGY

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
DEPARTMENT OF STATISTICS

Διαδικαστικά

- Διαλέξεις
  - Τρίτη 09:00-11:00 (Τ107)
  - Πέμπτη 09:00-11:00 (Τ107)
- Εργαστήριο (**R**)
  - Δευτέρα 11:00-13:00 Εργαστήριο Στατιστικής (Αντωνιάδου) ή Τ203
  - Κατόπιν σχετικής ανακοίνωσης
- Διδάσκοντες
  1. Π. Παπασταμούλης εως και Τρίτη 31/3/2026
  2. Ε. Ιωαννίδης Πέμπτη 2/4/2026 εως τέλος εξαμήνου
- e-class
  - **`https://eclass.aueb.gr/courses/STAT215/`**
- Ώρες γραφείου
  - Κοδριγκτώνος 12, 1ος όροφος
  - Τρίτη 11:00-13:00

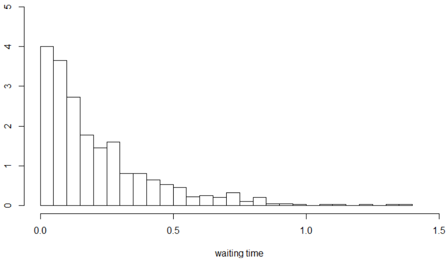
Τρόπος Βαθμολόγησης

$$\text{τελικός βαθμός} = g + (\text{bonus εργασιών})\mathrm{I}_{\{g \geqslant 5\}}$$

- g: βαθμός γραπτής εξέτασης (άριστα 10)
- bonus εργασιών
  - **προαιρετικό** σετ εβδομαδιαίων ασκήσεων
  - ≈ 10 συνολικές ασκήσεις που δίνουν 2 μονάδες (μέγιστο)
    - ≈ 5 σετ ασκήσεων στο κομμάτι ΠΠ [+1] μονάδα
    - ≈ 5 σετ ασκήσεων στο κομμάτι ΕΙ [+1] μονάδα

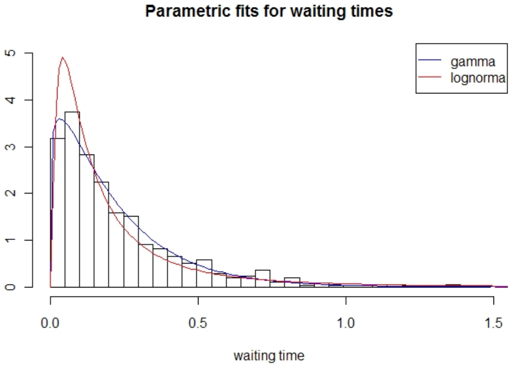
Παράδειγμα παραμετρικού μοντέλου

Δεδομένα: 799 χρόνοι αναμονής σε ταμείο



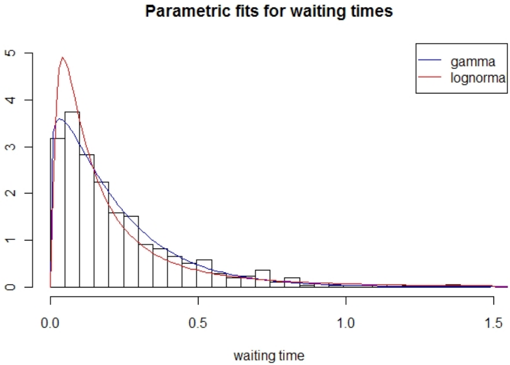
- Απαίτηση: τουλάχιστον 99% των πελατών πρέπει να περιμένουν το πολύ 1 λεπτό
- Βασισμένοι στα δεδομένα, ικανοποιείται η παραπάνω απαίτηση ή όχι;
- Προσαρμογή δύο παραμετρικών μοντέλων
  - Μοντέλο A: $X_i \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta) \Rightarrow f(x_i) = \frac{\beta^\alpha x_i^{\alpha-1} e^{-\beta x_i}}{\Gamma(\alpha)}$
  - Μοντέλο B: $X_i \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f(x_i) = \frac{1}{x_i \sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\log x_i - \mu)^2}{\sigma^2}\right\}$

Παράδειγμα παραμετρικού μοντέλου



$P_A(W \leq 1) \approx 0.993$ $\qquad$ $P_B(W \leq 1) \approx 0.968.$

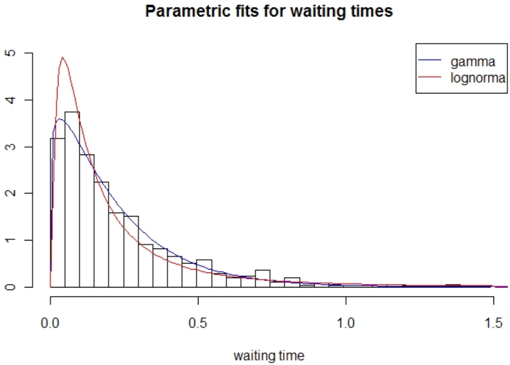
Παράδειγμα παραμετρικού μοντέλου



$P_A(W \leq 1) \approx 0.993$ $\qquad$ $P_B(W \leq 1) \approx 0.968.$

- Τα συμπεράσματά ενδέχεται να είναι ευαίσθητα στις παραμετρικές υποθέσεις μιας ανάλυσης

Παράδειγμα παραμετρικού μοντέλου



$P_A(W \leq 1) \approx 0.993$ $\qquad$ $P_B(W \leq 1) \approx 0.968.$

- Τα συμπεράσματά ενδέχεται να είναι ευαίσθητα στις παραμετρικές υποθέσεις μιας ανάλυσης
- Μη παραμετρική εκτίμηση: $\widehat{q}_{0.99} \approx 0.90$ και 95% διάστημα εμπιστοσύνης: $(0.81, 1.21]$.

Τι είναι η μη Παραμετρική Στατιστική ;

- Wolfowitz (1942)

  We shall refer to this situation (where a distribution is completely determined by the knowledge of its finite parameter set) as the parametric case, and denote the opposite case, where the functional forms of the distributions are unknown, as the non-parametric case.

Τι είναι η μη Παραμετρική Στατιστική;

- Wolfowitz (1942)

  We shall refer to this situation (where a distribution is completely determined by the knowledge of its finite parameter set) as the parametric case, and denote the opposite case, where the functional forms of the distributions are unknown, as the non-parametric case.

- Randles, Hettmansperger and Casella (2004)

  Nonparametric statistics can and should be broadly defined to include all methodology that does not use a model based on a single parametric family.

Τι είναι η μη Παραμετρική Στατιστική ;

- Wolfowitz (1942)

  We shall refer to this situation (where a distribution is completely determined by the knowledge of its finite parameter set) as the parametric case, and denote the opposite case, where the functional forms of the distributions are unknown, as the non-parametric case.

- Randles, Hettmansperger and Casella (2004)

  Nonparametric statistics can and should be broadly defined to include all methodology that does not use a model based on a single parametric family.

- Wasserman (2005)

  The basic idea of nonparametric inference is to use data to infer an unknown quantity while making as few assumptions as possible.

Μη Παραμετρική Στατιστική

- Συμπερασματολογία για άγνωστες ποσότητες μετά από την παρατήρηση δεδομένων
- Χωρίς να υποθέτουμε κάποια συγκεκριμένη παραμετρική οικογένεια κατανομών
- «Συμπερασματολογία με μοντέλα άπειρων διαστάσεων»
- Για παράδειγμα: δεδομένα x που αποτελούν πραγματοποίηση τυχαίας μεταβλητής X
  - Παραμετρική Στατιστική:

    $$X \sim f(\cdot|\theta), \quad f \in \mathcal{F} = \{g(\cdot|\theta), \theta \in \Theta\}$$

    και g κάποια συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας, π.χ. Poisson, Κανονική,
  - Μη παραμετρική Στατιστική:

    $$X \sim f(\cdot), \quad f \in \mathcal{F} = \left\{g(\cdot), \int \left(g''(x)\right)^2 \mathrm{d}x \leqslant c^2\right\}.$$

Βασικές έννοιες

- Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων
- Εκτίμηση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής
- Μέθοδοι επαναδειγματοληψίας και εφαρμογές
- Μη παραμετρική εκτίμηση συνάρτησης πυκνότητας
- Μη παραμετρική παλινδρόμηση

Βασικές έννοιες

- Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων
  - Προσημικός έλεγχος (sign test)
  - Wilcoxon test
  - Mann-Whitney test
  - Kruskal-Wallis test
- Εκτίμηση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής
- Μέθοδοι επαναδειγματοληψίας και εφαρμογές
- Μη παραμετρική εκτίμηση συνάρτησης πυκνότητας
- Μη παραμετρική παλινδρόμηση

Βασικές έννοιες

- Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων
  - Προσημικός έλεγχος (sign test)
  - Wilcoxon test
  - Mann-Whitney test
  - Kruskal-Wallis test
- Εκτίμηση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής
  - Ζώνη εμπιστοσύνης
  - Έλεγχοι υποθέσεων (Kolmogorov-Smirnov)
- Μέθοδοι επαναδειγματοληψίας και εφαρμογές
- Μη παραμετρική εκτίμηση συνάρτησης πυκνότητας
- Μη παραμετρική παλινδρόμηση

Βασικές έννοιες

- Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων
  - Προσημικός έλεγχος (sign test)
  - Wilcoxon test
  - Mann-Whitney test
  - Kruskal-Wallis test
- Εκτίμηση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής
  - Ζώνη εμπιστοσύνης
  - Έλεγχοι υποθέσεων (Kolmogorov-Smirnov)
- Μέθοδοι επαναδειγματοληψίας και εφαρμογές
  - To Jackknife
  - To Bootstrap
- Μη παραμετρική εκτίμηση συνάρτησης πυκνότητας
- Μη παραμετρική παλινδρόμηση

Βασικές έννοιες

- Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων
  - Προσημικός έλεγχος (sign test)
  - Wilcoxon test
  - Mann-Whitney test
  - Kruskal-Wallis test
- Εκτίμηση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής
  - Ζώνη εμπιστοσύνης
  - Έλεγχοι υποθέσεων (Kolmogorov-Smirnov)
- Μέθοδοι επαναδειγματοληψίας και εφαρμογές
  - Το Jackknife
  - Το Bootstrap
- Μη παραμετρική εκτίμηση συνάρτησης πυκνότητας
  - Το ιστόγραμμα
  - Εκτίμηση με χρήση πυρήνα (Kernel estimation)
- Μη παραμετρική παλινδρόμηση

Βασικές έννοιες

- Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων
  - Προσημικός έλεγχος (sign test)
  - Wilcoxon test
  - Mann-Whitney test
  - Kruskal-Wallis test
- Εκτίμηση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής
  - Ζώνη εμπιστοσύνης
  - Έλεγχοι υποθέσεων (Kolmogorov-Smirnov)
- Μέθοδοι επαναδειγματοληψίας και εφαρμογές
  - Το Jackknife
  - Το Bootstrap
- Μη παραμετρική εκτίμηση συνάρτησης πυκνότητας
  - Το ιστόγραμμα
  - Εκτίμηση με χρήση πυρήνα (Kernel estimation)
- Μη παραμετρική παλινδρόμηση
  - Regressograms
  - Nadaraya-Watson
  - Τοπική πολυωνυμική παλινδρόμηση
  - Εξομαλυντές splines

Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων (I)

βάρος πριν τη δίαιτα	74	91	88	82	101	88
βάρος μετά τη δίαιτα	71	86	83	78	103	81

- Είναι η συγκεκριμένη δίαιτα αποτελεσματική;

Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων (I)

βάρος πριν τη δίαιτα	74	91	88	82	101	88
βάρος μετά τη δίαιτα	71	86	83	78	103	81

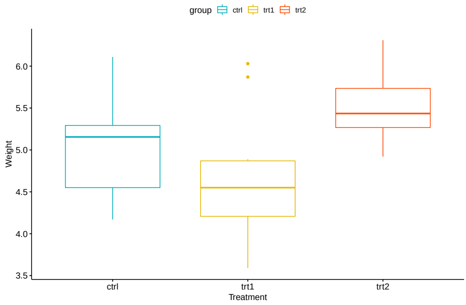
- Είναι η συγκεκριμένη δίαιτα αποτελεσματική;
- Παραμετρικός έλεγχος: (paired) t-test

Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων (I)

βάρος πριν τη δίαιτα	74	91	88	82	101	88
βάρος μετά τη δίαιτα	71	86	83	78	103	81

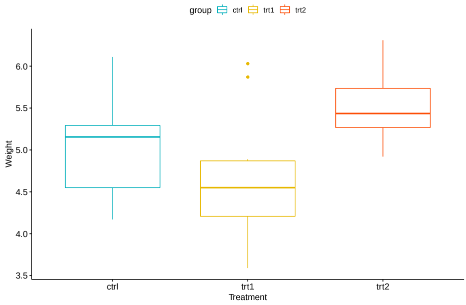
- Είναι η συγκεκριμένη δίαιτα αποτελεσματική;
- Παραμετρικός έλεγχος: (paired) t-test
- Μη παραμετρικοί έλεγχοι:
  - **Προσημικός** έλεγχος (κοιτά μόνο το πρόσημο των διαφορών)
  - **Wilcoxon** test (κοιτά το μέγεθος της διαφοράς + υπόθεση συμμετρίας)

Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων (II)



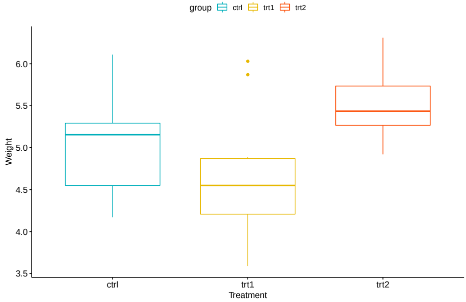
- Το βάρος του φυτού εξαρτάται από το γκρουπ ή όχι;

Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων (II)



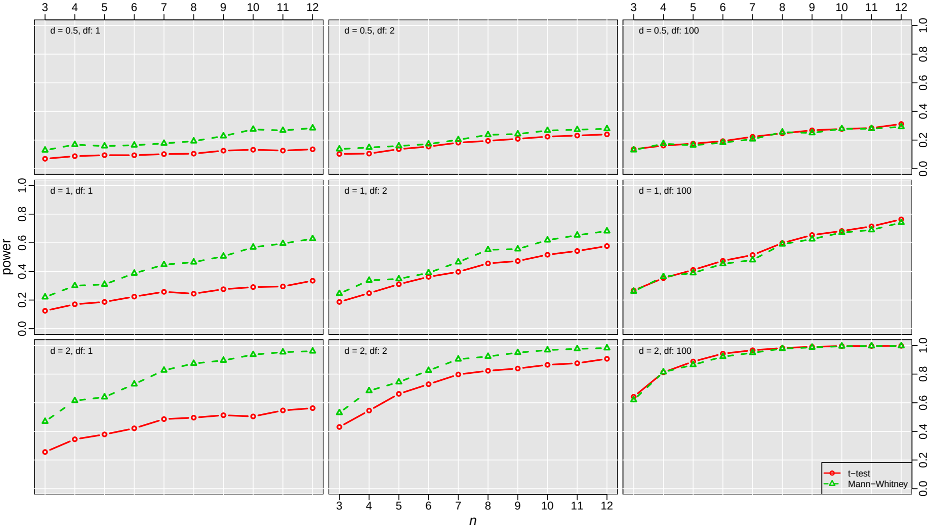
- Το βάρος του φυτού εξαρτάται από το γκρουπ ή όχι;
- Παραμετρικός έλεγχος: Ανάλυση διακύμανσης κατά έναν παράγοντα
  - Έλεγχος για ισότητα μέσων
  - Ειδική περίπτωση για δύο ανεξάρτητες ομάδες: t-test

Μη παραμετρικοί έλεγχοι υποθέσεων (II)



- Το βάρος του φυτού εξαρτάται από το γκρουπ ή όχι;
- Παραμετρικός έλεγχος: Ανάλυση διακύμανσης κατά έναν παράγοντα
  - Έλεγχος για ισότητα μέσων
  - Ειδική περίπτωση για δύο ανεξάρτητες ομάδες: t-test
- Μη παραμετρικός έλεγχος: **Kruskal-Wallis** test
  - Έλεγχος για ισότητα κατανομών
  - Ειδική περίπτωση για δύο ανεξάρτητες ομάδες: **Mann-Whitney** U

Mann-Whitney vs t-test



Ασυμπτωτική σχετική αποδοτικότητα

Έστω $\hat{\theta}_1$ και $\hat{\theta}_2$ δύο εκτιμητές παραμέτρου θ τέτοιοι ώστε

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_i - \theta) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma_i^2), \qquad i = 1, 2.$$

Η *Ασυμπτωτική σχετική αποδοτικότητα* (ARE: asymptotic relative efficiency) του $\hat{\theta}_1$ ως προς τον $\hat{\theta}_2$ είναι

$$\mathrm{ARE}(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}.$$

Παράδειγμα: Mann–Whitney U vs. two-sample t-test.

Σε κανονικό πληθυσμό,

$$\mathrm{ARE}(\text{Mann–Whitney}, t\text{-test}) = \frac{3}{\pi} \approx 0.955.$$

- Στην περίπτωση της κανονικής κατανομής το Mann–Whitney U είναι περίπου 95.5% αποδοτικό σε σχέση με t-test.
- Για συμμετρικές κατανομές με βαριές ουρές, το Mann–Whitney test είναι προτιμότερο από το t-test.

Εκτίμηση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής

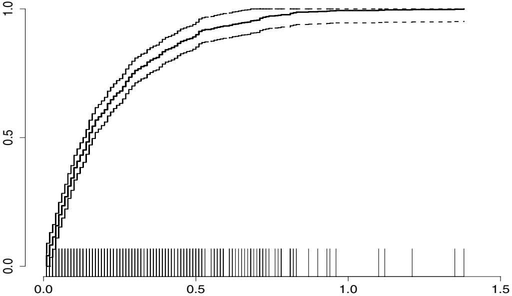
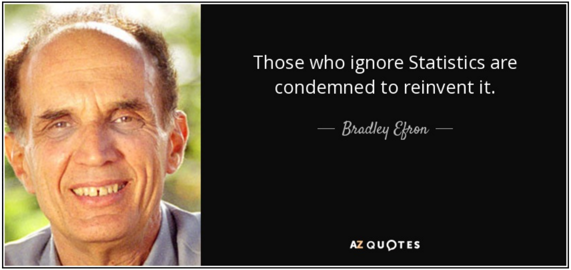


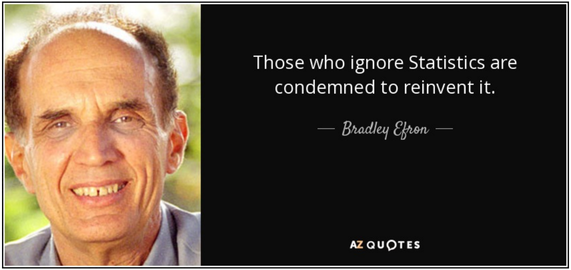
FIGURE 2.1. Nerve data. Each vertical line represents one data point. The solid line is the empirical distribution function. The lines above and below the middle line are a 95 percent confidence band.

Cox and Lewis (1966). The Statistical Analysis of Series of Events. Chapman and Hall.

Bootstrap

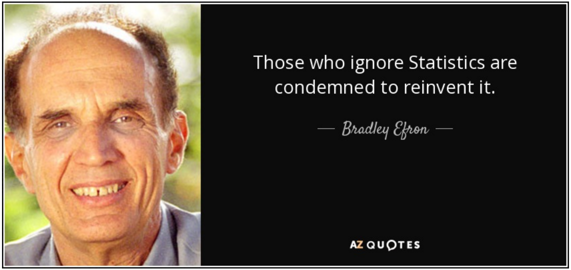

Those who ignore Statistics are condemned to reinvent it.
— Bradley Efron —
AZ QUOTES

Bootstrap



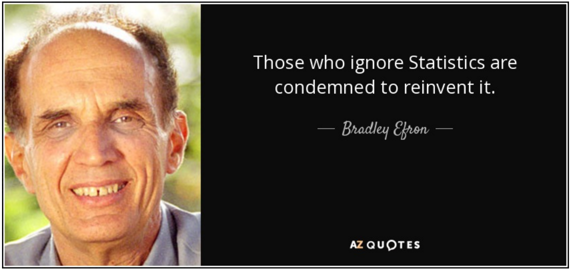
- Bradley Efron: εισήγαγε την τεχνική Bootstrap το 1979

Bootstrap



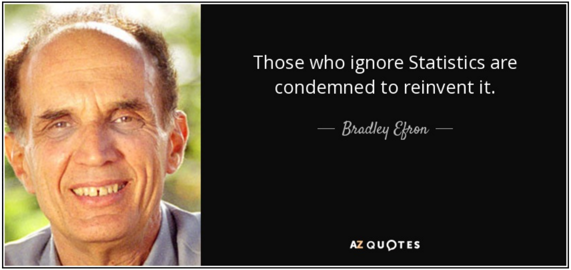
- Bradley Efron: εισήγαγε την τεχνική Bootstrap το 1979
- Το Bootstrap είναι μία από τις πρώτες υπολογιστικές μεθόδους της Στατιστικής

Bootstrap



- Bradley Efron: εισήγαγε την τεχνική Bootstrap το 1979
- Το Bootstrap είναι μία από τις πρώτες υπολογιστικές μεθόδους της Στατιστικής
- Η επίδραση του στη Στατιστική καθώς και σε κάθε περιοχή εφαρμογή της ήταν (είναι) τεράστια

Bootstrap



- Bradley Efron: εισήγαγε την τεχνική Bootstrap το 1979
- Το Bootstrap είναι μία από τις πρώτες υπολογιστικές μεθόδους της Στατιστικής
- Η επίδραση του στη Στατιστική καθώς και σε κάθε περιοχή εφαρμογή της ήταν (είναι) τεράστια
- Αντικατάσταση επίπονων αλγεβρικών μεθόδων με τεχνικές προσομοίωσης

Bootstrap

- Στατιστική συμπερασματολογία: βασίζεται στην εκτίμηση κάποιας ποσότητας της δειγματικής κατανομής κάποιου εκτιμητή
- Παράδειγμα: το τυπικό σφάλμα είναι η εκτίμηση της διασποράς της δειγματικής κατανομής του εκτιμητή
    - Πάρε πολλά δείγματα από τον *πληθυσμό*
    - Υπολόγισε την εκτίμηση που προκύπτει σε κάθε δείγμα
    - Η κατανομή που προκύπτει είναι η *δειγματική κατανομή του εκτιμητή*

Bootstrap

- Στατιστική συμπερασματολογία: βασίζεται στην εκτίμηση κάποιας ποσότητας της δειγματικής κατανομής κάποιου εκτιμητή
- Παράδειγμα: το τυπικό σφάλμα είναι η εκτίμηση της διασποράς της δειγματικής κατανομής του εκτιμητή
    - Πάρε πολλά δείγματα από τον *πληθυσμό*
    - Υπολόγισε την εκτίμηση που προκύπτει σε κάθε δείγμα
    - Η κατανομή που προκύπτει είναι η *δειγματική κατανομή του εκτιμητή*
- Στην πράξη όμως έχουμε μόνο ένα δείγμα

Bootstrap

- Στατιστική συμπερασματολογία: βασίζεται στην εκτίμηση κάποιας ποσότητας της δειγματικής κατανομής κάποιου εκτιμητή
- Παράδειγμα: το τυπικό σφάλμα είναι η εκτίμηση της διασποράς της δειγματικής κατανομής του εκτιμητή
    - Πάρε πολλά δείγματα από τον *πληθυσμό*
    - Υπολόγισε την εκτίμηση που προκύπτει σε κάθε δείγμα
    - Η κατανομή που προκύπτει είναι η *δειγματική κατανομή του εκτιμητή*
- Στην πράξη όμως έχουμε μόνο ένα δείγμα
- Η ιδέα του bootstrap:
    1. Πάρε πολλά δείγματα από μία *εκτίμηση του πληθυσμού*
    2. Υπολόγισε την εκτίμηση που προκύπτει σε κάθε δείγμα
    3. Η κατανομή που προκύπτει είναι η *bootstrap κατανομή του εκτιμητή*

Bootstrap

- Στατιστική συμπερασματολογία: βασίζεται στην εκτίμηση κάποιας ποσότητας της δειγματικής κατανομής κάποιου εκτιμητή
- Παράδειγμα: το τυπικό σφάλμα είναι η εκτίμηση της διασποράς της δειγματικής κατανομής του εκτιμητή
  - Πάρε πολλά δείγματα από τον *πληθυσμό*
  - Υπολόγισε την εκτίμηση που προκύπτει σε κάθε δείγμα
  - Η κατανομή που προκύπτει είναι η *δειγματική κατανομή του εκτιμητή*
- Στην πράξη όμως έχουμε μόνο ένα δείγμα
- Η ιδέα του bootstrap:
  1. Πάρε πολλά δείγματα από μία *εκτίμηση του πληθυσμού*
  2. Υπολόγισε την εκτίμηση που προκύπτει σε κάθε δείγμα
  3. Η κατανομή που προκύπτει είναι η *bootstrap κατανομή του εκτιμητή*
- Το βήμα 1 τελικά ισοδυναμεί με δειγματοληψία με επανάθεση από το παρατηρηθέν δείγμα!

Bootstrap στον δειγματικό μέσο

Έστω τυχαίο δείγμα $n = 10$ παρατηρήσεων

- $\boldsymbol{x} = (12.8, 8.6, 5.8, 8.6, 12.8, 12.2, 14.5, 7.8, 6, 13.6)$
- $\bar{x} \approx 10.27$, (εκτιμηθέν) τυπικό σφάλμα $\widehat{s.e.(\bar{x})} \approx 1.03$

Bootstrap δείγματα

	Δείγμα										Μέσος
1	6	8.6	5.8	14.5	13.6	13.6	14.5	12.8	13.6	14.5	11.75

Εκτίμηση τυπικού σφάλματος από τα Bootstrap δείγματα:

Bootstrap στον δειγματικό μέσο

Έστω τυχαίο δείγμα $n = 10$ παρατηρήσεων

- $\boldsymbol{x} = (12.8, 8.6, 5.8, 8.6, 12.8, 12.2, 14.5, 7.8, 6, 13.6)$
- $\bar{x} \approx 10.27$, (εκτιμηθέν) τυπικό σφάλμα $\widehat{s.e.(\bar{x})} \approx 1.03$

Bootstrap δείγματα

	Δείγμα										Μέσος
1	6	8.6	5.8	14.5	13.6	13.6	14.5	12.8	13.6	14.5	11.75
2	12.8	12.8	6	8.6	8.6	7.8	8.6	6	6	7.8	8.50

Εκτίμηση τυπικού σφάλματος από τα Bootstrap δείγματα: 2.30

Bootstrap στον δειγματικό μέσο

Έστω τυχαίο δείγμα $n = 10$ παρατηρήσεων

- $\boldsymbol{x} = (12.8, 8.6, 5.8, 8.6, 12.8, 12.2, 14.5, 7.8, 6, 13.6)$
- $\bar{x} \approx 10.27$, (εκτιμηθέν) τυπικό σφάλμα $\widehat{s.e.(\bar{x})} \approx 1.03$

Bootstrap δείγματα

	Δείγμα										Μέσος
1	6	8.6	5.8	14.5	13.6	13.6	14.5	12.8	13.6	14.5	11.75
2	12.8	12.8	6	8.6	8.6	7.8	8.6	6	6	7.8	8.50
3	6	12.8	8.6	14.5	8.6	8.6	8.6	7.8	14.5	13.6	10.36

Εκτίμηση τυπικού σφάλματος από τα Bootstrap δείγματα: 1.63

Bootstrap στον δειγματικό μέσο

Έστω τυχαίο δείγμα $n = 10$ παρατηρήσεων

- $\boldsymbol{x} = (12.8, 8.6, 5.8, 8.6, 12.8, 12.2, 14.5, 7.8, 6, 13.6)$
- $\bar{x} \approx 10.27$, (εκτιμηθέν) τυπικό σφάλμα $\widehat{s.e.(\bar{x})} \approx 1.03$

Bootstrap δείγματα

	Δείγμα										Μέσος
1	6	8.6	5.8	14.5	13.6	13.6	14.5	12.8	13.6	14.5	11.75
2	12.8	12.8	6	8.6	8.6	7.8	8.6	6	6	7.8	8.50
3	6	12.8	8.6	14.5	8.6	8.6	8.6	7.8	14.5	13.6	10.36
4	12.8	12.8	8.6	7.8	6	12.8	12.8	12.8	5.8	12.8	10.50

Εκτίμηση τυπικού σφάλματος από τα Bootstrap δείγματα: 1.34

Bootstrap στον δειγματικό μέσο

Έστω τυχαίο δείγμα $n = 10$ παρατηρήσεων

- $\boldsymbol{x} = (12.8, 8.6, 5.8, 8.6, 12.8, 12.2, 14.5, 7.8, 6, 13.6)$
- $\bar{x} \approx 10.27$, (εκτιμηθέν) τυπικό σφάλμα $\widehat{s.e.(\bar{x})} \approx 1.03$

Bootstrap δείγματα

	Δείγμα										Μέσος
1	6	8.6	5.8	14.5	13.6	13.6	14.5	12.8	13.6	14.5	11.75
2	12.8	12.8	6	8.6	8.6	7.8	8.6	6	6	7.8	8.50
3	6	12.8	8.6	14.5	8.6	8.6	8.6	7.8	14.5	13.6	10.36
4	12.8	12.8	8.6	7.8	6	12.8	12.8	12.8	5.8	12.8	10.50
5	7.8	12.8	6	8.6	5.8	13.6	12.8	12.2	6	14.5	10.01

Εκτίμηση τυπικού σφάλματος από τα Bootstrap δείγματα: 1.17

Bootstrap στον δειγματικό μέσο

Έστω τυχαίο δείγμα $n = 10$ παρατηρήσεων

- $\boldsymbol{x} = (12.8, 8.6, 5.8, 8.6, 12.8, 12.2, 14.5, 7.8, 6, 13.6)$
- $\bar{x} \approx 10.27$, (εκτιμηθέν) τυπικό σφάλμα $\widehat{s.e.(\bar{x})} \approx 1.03$

Bootstrap δείγματα

	Δείγμα										Μέσος
1	6	8.6	5.8	14.5	13.6	13.6	14.5	12.8	13.6	14.5	11.75
2	12.8	12.8	6	8.6	8.6	7.8	8.6	6	6	7.8	8.50
3	6	12.8	8.6	14.5	8.6	8.6	8.6	7.8	14.5	13.6	10.36
4	12.8	12.8	8.6	7.8	6	12.8	12.8	12.8	5.8	12.8	10.50
5	7.8	12.8	6	8.6	5.8	13.6	12.8	12.2	6	14.5	10.01
6	12.8	12.2	12.8	12.8	8.6	8.6	8.6	12.8	7.8	5.8	10.28

Εκτίμηση τυπικού σφάλματος από τα Bootstrap δείγματα: 1.04

Bootstrap στον δειγματικό μέσο

Έστω τυχαίο δείγμα $n = 10$ παρατηρήσεων

- $\boldsymbol{x} = (12.8, 8.6, 5.8, 8.6, 12.8, 12.2, 14.5, 7.8, 6, 13.6)$
- $\bar{x} \approx 10.27$, (εκτιμηθέν) τυπικό σφάλμα $\widehat{s.e.(\bar{x})} \approx 1.03$

Bootstrap δείγματα

	Δείγμα										Μέσος
1	6	8.6	5.8	14.5	13.6	13.6	14.5	12.8	13.6	14.5	11.75
2	12.8	12.8	6	8.6	8.6	7.8	8.6	6	6	7.8	8.50
3	6	12.8	8.6	14.5	8.6	8.6	8.6	7.8	14.5	13.6	10.36
4	12.8	12.8	8.6	7.8	6	12.8	12.8	12.8	5.8	12.8	10.50
5	7.8	12.8	6	8.6	5.8	13.6	12.8	12.2	6	14.5	10.01
6	12.8	12.2	12.8	12.8	8.6	8.6	8.6	12.8	7.8	5.8	10.28
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Εκτίμηση τυπικού σφάλματος από τα Bootstrap δείγματα: 1.04

Bootstrap στον δειγματικό μέσο

Έστω τυχαίο δείγμα $n = 10$ παρατηρήσεων

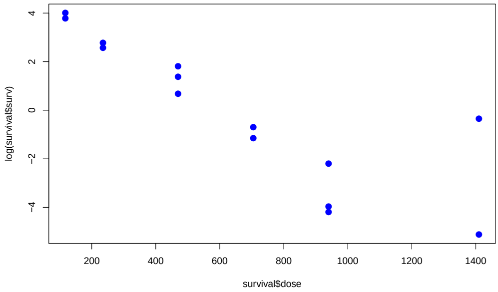
- $\boldsymbol{x} = (12.8, 8.6, 5.8, 8.6, 12.8, 12.2, 14.5, 7.8, 6, 13.6)$
- $\bar{x} \approx 10.27$, (εκτιμηθέν) τυπικό σφάλμα $\widehat{s.e.(\bar{x})} \approx 1.03$

Bootstrap δείγματα

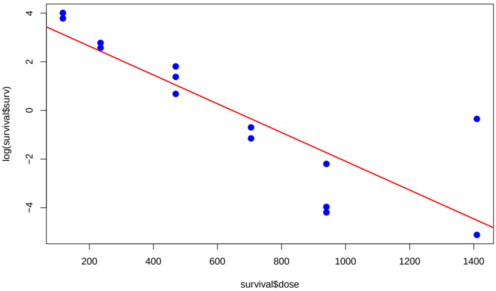
	Δείγμα										Μέσος
1	6	8.6	5.8	14.5	13.6	13.6	14.5	12.8	13.6	14.5	11.75
2	12.8	12.8	6	8.6	8.6	7.8	8.6	6	6	7.8	8.50
3	6	12.8	8.6	14.5	8.6	8.6	8.6	7.8	14.5	13.6	10.36
4	12.8	12.8	8.6	7.8	6	12.8	12.8	12.8	5.8	12.8	10.50
5	7.8	12.8	6	8.6	5.8	13.6	12.8	12.2	6	14.5	10.01
6	12.8	12.2	12.8	12.8	8.6	8.6	8.6	12.8	7.8	5.8	10.28
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
10^3	5.8	5.8	13.6	5.8	12.8	12.2	13.6	8.6	8.6	7.8	9.46

Εκτίμηση τυπικού σφάλματος από τα Bootstrap δείγματα: 0.98

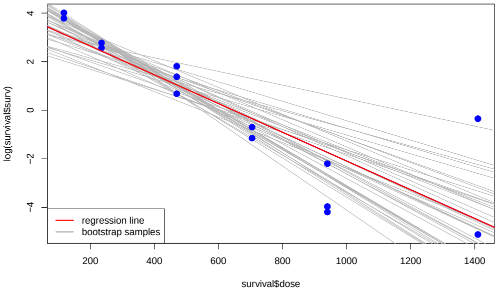
Bootstrap στην παλινδρομηση



Bootstrap στην παλινδρομηση

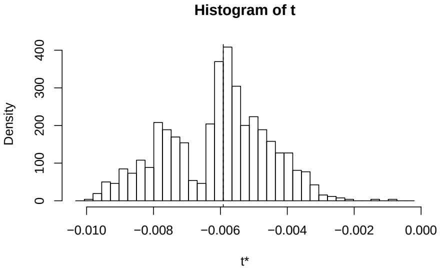


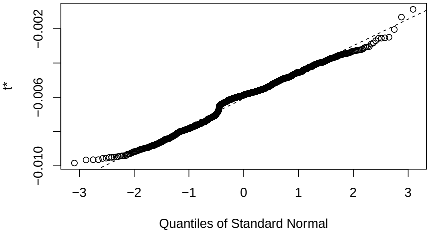
Bootstrap στην παλινδρομηση



Bootstrap στην παλινδρομηση

Εκτιμηθείσα κατανομή του $\widehat{\beta}$



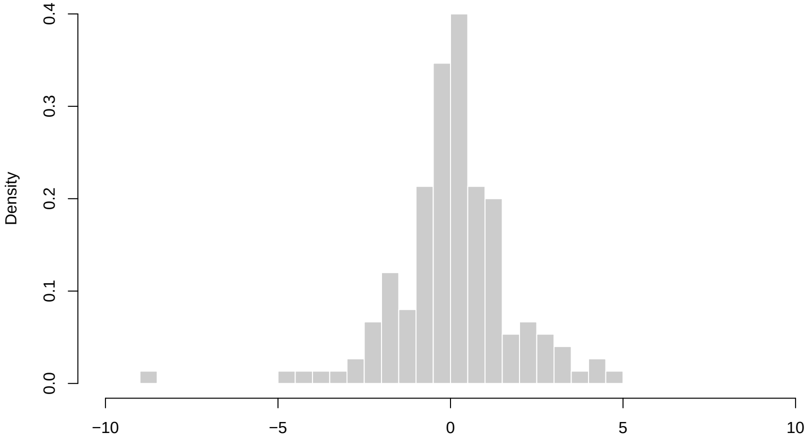


Bootstrap Διαστήματα Εμπιστοσύνης για το β

Level	Normal	Basic	Percentile	BCa
95%	$(-0.0088, -0.0026)$	$(-0.0085, -0.0026)$	$(-0.0093, -0.0033)$	$(-0.0087, -0.0026)$

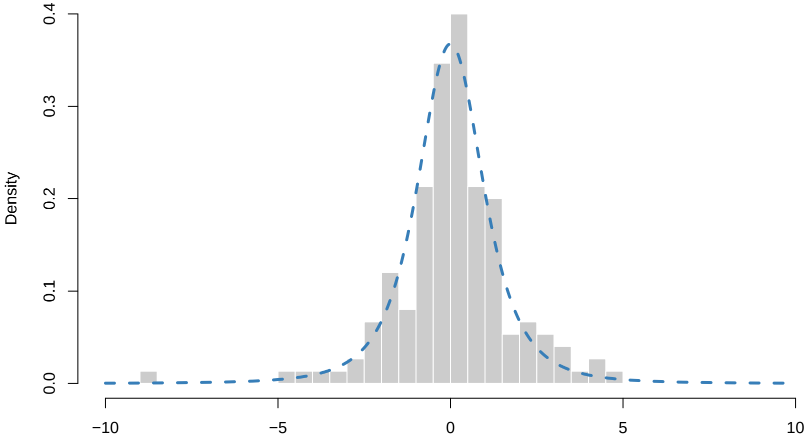
Εκτίμηση συνάρτηση πυκνότητας

$n = 150$ προσομοιώμενες παρατηρήσεις από την κατανομή



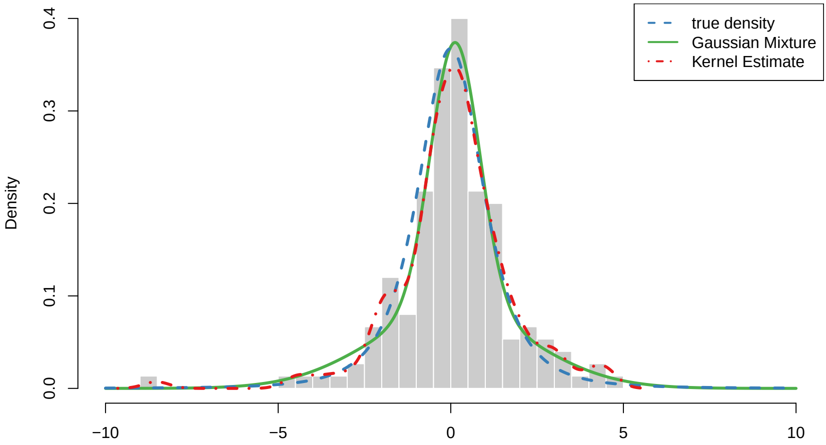
Εκτίμηση συνάρτηση πυκνότητας

$n = 150$ προσομοιώμενες παρατηρήσεις από την κατανομή t_3

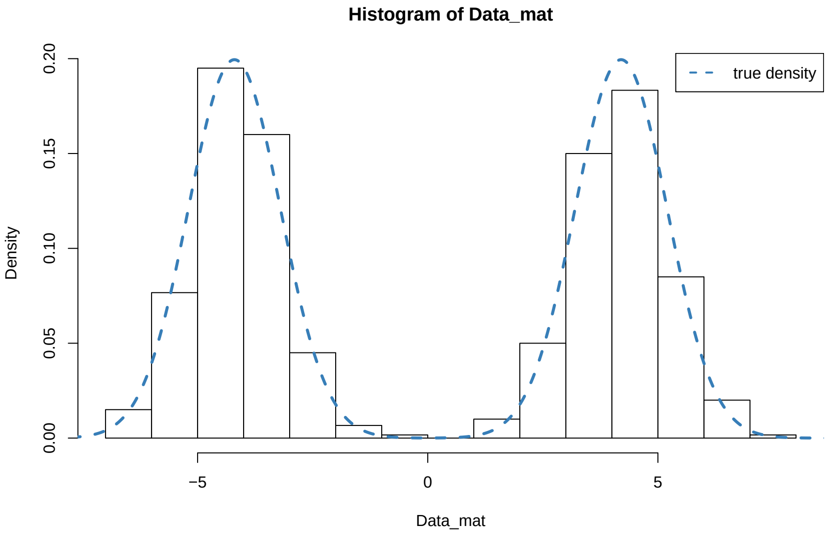


Εκτίμηση συνάρτηση πυκνότητας

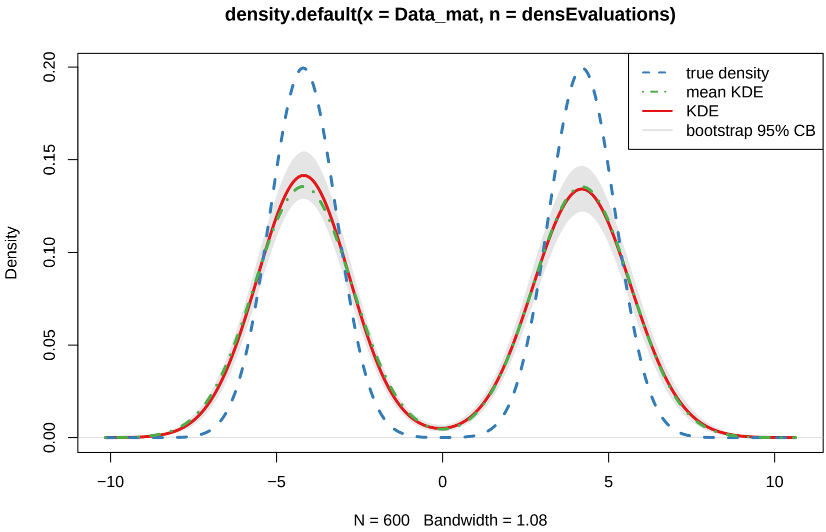
$n = 150$ προσομοιώμενες παρατηρήσεις από την κατανομή t_3



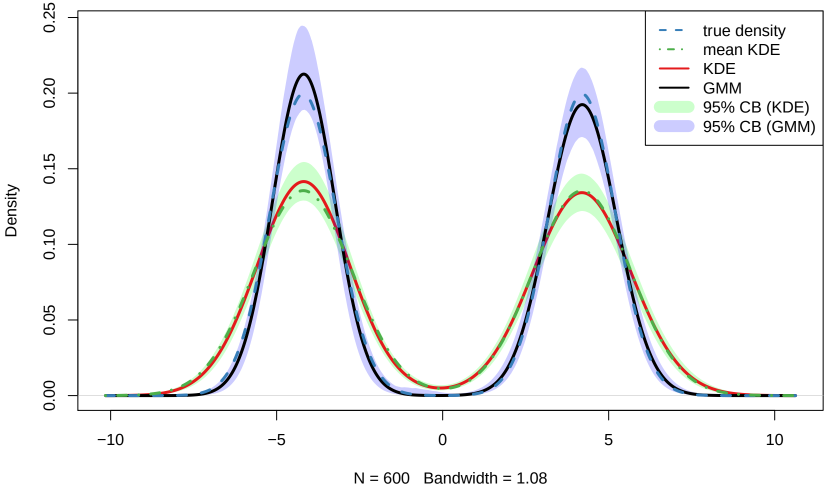
Εκτίμηση συνάρτηση πυκνότητας



Εκτίμηση συνάρτηση πυκνότητας

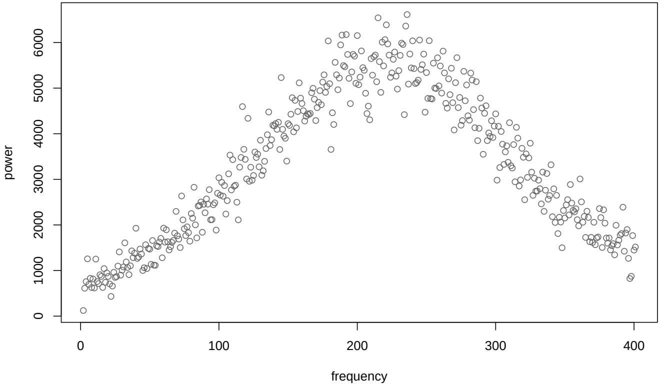


Εκτίμηση συνάρτηση πυκνότητας (κάτι καλύτερο;)

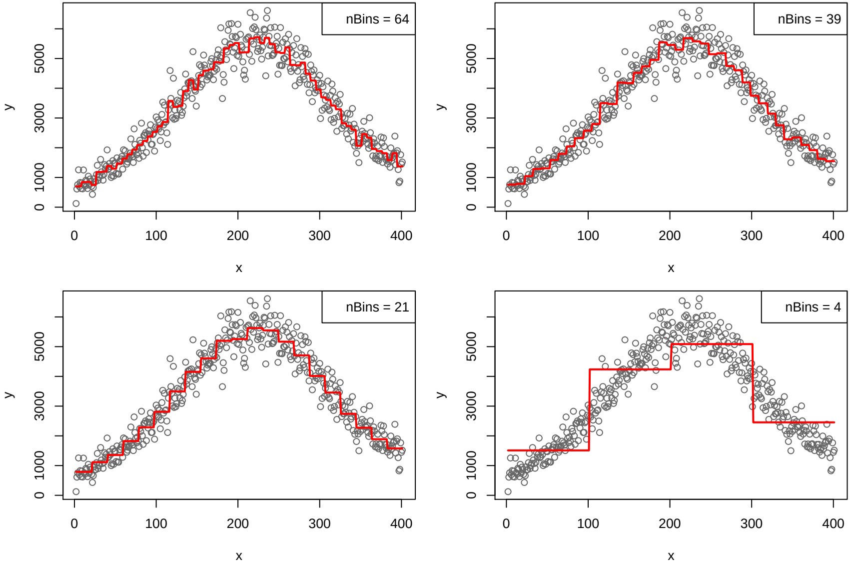


Μη παραμετρική παλινδρόμηση

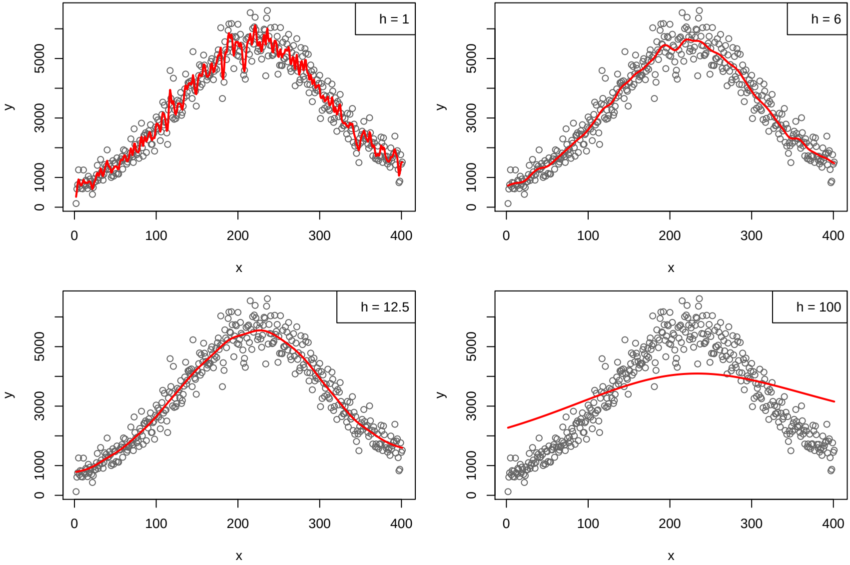
- Cosmic microwave background radiation data
- 379000 χρόνια μετά το Big Bang



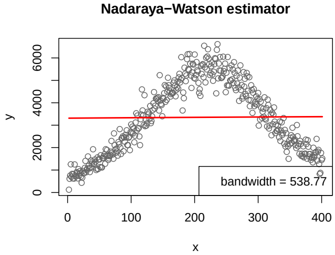
Μη παραμετρική παλινδρόμηση: Regressogram

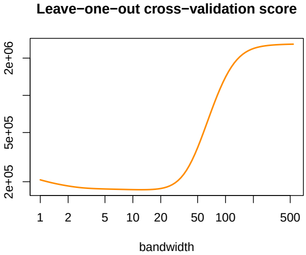


Μη παραμετρική παλινδρόμηση: Nadaraya-Watson



Μη παραμετρική παλινδρόμηση: Nadaraya-Watson





Βιβλιογραφία

- Μπατσίδης Α, Παπασταμούλης Π, Πετρόπουλος Κ, Ρακιτζής Α.
  Μη παραμετρική Στατιστική
  Θεωρία και Εφαρμογές με χρήση R και SPSS.
  ΚΑΛΛΙΠΟΣ, Ανοιχτές Ακαδημαϊκές Εκδόσεις (2022)
  https://dx.doi.org/10.57713/kallipos-102
- Ιωαννίδης, Ε.
  Μη παραμετρική Στατιστική.
  Πανεπιστημιακές σημειώσεις ΟΠΑ
- Wasserman, L.
  All of Non-Parametric Statistics.
  Springer