

Άσκηση 1. Έστω F η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X . Υπολογίστε τον εκτιμητή αντικατάστασης του συναρτησιακού $\theta = T(F) = P(\alpha < X \leq \beta)$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\alpha < \beta$. Ποια θα είναι η συνάρτηση επιρροής για αυτήν την πιθανότητα; Κατόπιν, να εκτιμηθεί το τυπικό σφάλμα του εκτιμητή αντικατάστασης και να κατασκευαστεί ένα $100(1 - \alpha)\%$ ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης για το θ με βάση την εμπειρική συνάρτηση επιρροής.

Άσκηση 2 (Αριθμητική εφαρμογή για την Άσκηση 1). Προσομοιώστε ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 100 παρατηρήσεων από την κανονική κατανομή $\mathcal{N}(0, 1)$. Να εκτιμήσετε την πιθανότητα $\theta = T(F) = P(-0.6 < X \leq 0.3)$ και να κατασκευάσετε ένα ασυμπτωτικό διάστημα εμπιστοσύνης συντελεστού 95%. Να επαναλάβετε την ίδια διαδικασία για ένα προσομοιωμένο δείγμα μεγέθους 10000 παρατηρήσεων. Και στις δύο περιπτώσεις συγκρίνετε την απάντησή σας με βάση την πραγματική πιθανότητα που προκύπτει κανοντας χρήση της συνάρτησης κατανομής της $\mathcal{N}(0, 1)$.

Άσκηση 3. Έστω F η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής X με διασπορά σ^2 και μέση τιμή μ . Υπολογίστε τον εκτιμητή αντικατάστασης του σ^2 , όταν το μ είναι γνωστό. Ποια είναι η συνάρτηση επιρροής για το σ^2 ;