### Τα διαστήματα εμπιστοσύνης bootstrap-ποσοστιαίων σημείων (bootstrap percentile)

* Η κατασκευή αυτών των δ.ε. ξεκινάει από τα δ.ε. που θα παίρναμε ΑΝ τα  και τα  ήταν περίπου κανονικά, δηλαδή αν
  + - α)  και
    - β) .



* Τότε τα δ.ε. για το  θα ήταν:







, καθώς 



,



όπου  η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της ,



* δηλαδή  η cdf της  (από (β),



* και άρα ).

Παρατηρείστε ότι η ισότητα αυτή **οφείλεται** κυρίως στην (υποτιθέμενη) συμμετρία της κατανομής της  γύρω από το , που συνεπάγεται η υποτιθέμενη κανονικότητα.

* Ακολούθως τα πάνω και κάτω όρια του δ.ε. εκτιμώνται από τη δειγματική bootstrap-κατανομή των :
  + - 



* και το **bootstrap percentile δ.ε. θα ήταν το**

,



όπου λοιπόν  η  μικρότερη από τις , δηλαδή:





Ένα πλεονέκτημα των bootstrap percentile δ.ε. αφορά τη περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για δ.ε. ενός μονότονου μετασχηματισμού του .



Κατ’ αρχάς, οποτεδήποτε έχω ένα δ.ε. για το  μπορώ να κατασκευάσω ένα «αντίστοιχο» δ.ε. για το :



αν  τότε και 



Άρα είναι  δ.ε. για το 



Το πλεονέκτημα για τη bootstrap-percentile μέθοδο κατασκευής δ.ε. είναι ότι διατηρεί αυτή την ίδια αντιστοιχία σε μονότονους μετασχηματισμούς: (“**transformation-respecting property**”)

* Είτε κατασκευάσω bootstrap percentile δ.ε.  κάνοντας bootstrap στο,



* είτε ξεκινώντας από τα bootstrap-percentile δ.ε.  κάνοντας bootstrap στο  και,



* + - ακολούθως, κατασκευάζοντας τα αντίστοιχα του μετασχηματίζοντας με τον  τα όρια του διαστήματος,



* **θα πάρω το ίδιο αποτέλεσμα:**





Όμως η διατήρηση των bootstrap-percentile δ.ε. στους μονότονους μετασχηματισμούς αφορά και το κύριο επιχείρημα για την νομιμοποίηση της κατασκευής τους:

##### Επιχείρημα «νομιμοποίησης του bootstrap-percentile δ.ε.



* **Έστω ότι υπάρχει μετασχηματισμός** 



* + τέτοιος ώστε  για οποιαδήποτε  ,



* + ακόμα και για : δηλαδή  **(!!!)**



* Τότε **ένα ακριβές δ.ε.** για το  θα ήταν το



,



όπου  η cdf του. Και λόγω συμμετρίας της  γύρω από το 0







* Άρα **ένα ακριβές δ.ε.** για το  θα ήταν το







Το «επιχείρημα νομιμοποίησης» είναι τώρα ότι τα **bootstrap-percentile δ.ε. στηριγμένα στο «ιδανικό bootstrap» ταυτίζονται με τα παραπάνω** δηλαδή:

* Αν  η **cdf του «ιδανικού» bootstrap**, τότε τα







είναι **τα bootstrap percentile δ.ε. για το ** του «ιδανικού bootstrap».

* Σημειώστε ότι τα αντίστοιχα δειγματικά είναι τα

,



όπου  η ecdf που εκτιμάει την

**Απόδειξη ότι τα cdf του «ιδανικού» bootstrap ταυτίζονατι με το ακριβές δ.ε.** **.** (για το αριστερό άκρο του δ.ε.)

Θα δείξουμε ότι:





















που αληθεύει καθώς υποθέσαμε .



Παρατηρείστε ότι η παραπάνω σχέση είναι η bootstrap-αντίστοιχη (αντικαθιστούμε  με ) της !



**Άρα τα bootstrap-percentile δ.ε.** **είναι κοντά στα βέλτιστα** αν υπάρχει μετασχηματισμός που κανονικοποιεί και σταθεροποιεί τη διακύμανση (θα αρκούσε και «μετασχηματισμός που δίνει συμμετρική κατανομή»), **ακόμα και αν δεν τον γνωρίζω.**

**Παρατήρηση**: συγκρίνοντας τα bootstrap-percentile με τα (basic ή pivotal) bootstrap θα δείτε ότι η  χρησιμοποιείται στα πρώτα για τον υπολογισμό του αριστερού άκρου του δ.ε. ενώ στα δεύτερα για το δεξί άκρο! Αυτή η «αντίφαση» αίρεται με την υπόθεση της συμμετρίας των «μετασχηματισμών» . Αυτή είναι δύσκολο να ισχύει για μικρά n καθώς ο μετασχηματισμός  θα είναι μη γραμμικός και θα συνεπάγεται ένα σφάλμα μεροληψίας για μικρά n.

##### Παράδειγμα (Efron 13.3)

Έστω  θέλουμε να εκτιμήσουμε το , όπου. Η θεωρητική τιμή του  είναι η , ενώ η δειγματική η , έστω . Παίρνουμε  bootstrap δείγματα και άρα 1000 τιμές . Αυτά τα 1000 bootstrapδείγματα έχουν μια δειγματική κατανομή που δίνεται από



.







Το 95% **bootstrap-percentile** δ.ε. για το  θα ήταν το .



Με την κανονική προσέγγιση [σε αυτήν την ασύμμετρη κατανομή!] και με τιμή  θα παίρναμε τα **95%-κανονικά δ.ε.** .

Eδώ όμως «γνωρίζουμε» τον μετασχηματισμό που κάνει την κατανομή κανονική και σταθεροποιεί τη διακύμανση: είναι η . H κατανομή της  είναι πολύ πλησιέστερη στη κανονική και έτσι:

Το **κανονικό δ.ε για το ** θα ήταν το , ενώ το **Bootstrap-percentile** θα ήταν το , που συμφωνεί με το προηγούμενο.



Έτσι αν κατασκευάζαμε δ.ε. πρώτα για το  και τα μετασχηματίζαμε με την exp σε δ.ε για το  θα παίρναμε:





που είναι κοντά στο δ.ε. για το  της bootstrap percentile μεθόδου.

**Άρα: Το bootstrap percentile δ.ε. συμφωνεί με αυτά της κανονικής θεωρίας σε μια ιδανική κλίμακα, χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε τον ιδανικό μετασχηματισμό:**



* Τα κανονικά ασυμπτωτικά δ.ε. υποθέτουν 
* Τα bootstrap percentile υποθέτουν: υπάρχει μετασχηματισμός , ώστε για : , χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζω το .
* Όμως ένας τέτοιος μετασχηματισμός μπορεί να μην υπάρχει.
* Ως περαιτέρω χαλάρωση προτάθηκαν τα ** - bootstrap percentile (Bias Corrected and variance accelerated)** δ.ε.
  + - που **επιτρέπουν στη παραπάνω σχέση ένα Bias** και **μια εξάρτηση της διακύμανσης από το **: . Η κατασκευή τους παραλείπεται εδώ.

### Θεωρία για Bootstrap

##### Πόσο κοντά είναι τα δ.ε. στην ονομαστική κάλυψη του 95% (π.χ.);

Στο παράδειγμα της προηγούμενης παραγράφου κατασκευάστηκαν 500 δείγματα  και για καθένα από αυτά τα δ.ε για το . Ακολούθως ελέγχουμε σε πόσα από αυτά συμπεριλαμβάνεται το . Ιδανικό θα ήταν να έχουμε περίπου 2.5% απώλειες δεξιά και άλλες τόσες αριστερά, αλλά:



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | % απώλειες αριστερά | % απώλειες δεξιά |
|  | 1.2% | 8.8% |
| Bootstrap percentile | 2.8% | 5.2% |

Η όλη ιδέα του **bootstrap βασίζεται στη προσέγγιση της κατανομής**

 της ,

(όπου ο δείκτης  στο υποδηλώνει ότι τα ),



από την

 της 



όπου ο δείκτης  στο υποδηλώνει ότι τα  δεσμευμένα ως προς .

Αυτή η προσέγγιση **στηρίζεται σε δύο πράγματα**:

Α) τη προσέγγιση της  από την  και



Β) το ότι η είναι μια συνεχής ( και παραγωγίσιμη) συνάρτηση του .

Ενώ το bootstrap χρησιμοποιείται ως πανάκεια σε όλα τα δυνατά προβλήματα δεν είναι καθόλου αυτονόητο ότι οι παραπάνω δύο συνθήκες (Α κα Β) είναι οι εξασφαλισμένες, καθώς

* Τα στατιστικά που μας ενδιαφέρουν (π.χ. παλινδρόμηση) μπορεί να είναι αρκετά σύνθετα
* Ο τρόπος που στήνεται το Bootstrap μπορεί να επιτρέπει διαφοροποιήσεις, που κάποια να δουλεύει και κάποια άλλη όχι.

Έτσι για να έχει κανείς σε μια συγκεκριμένη εφαρμογή μια θεωρητική νομιμοποίηση για τη χρήση ενός συγκεκριμένου τρόπου να κάνει bootstrap χρειάζεται να μπορεί να ενταχθεί σε ένα θεώρημα που να λέει ότι σε αυτήν την εφαρμογή με τις συγκεκριμένες επιλογές **«το bootstrap λειτουργεί» (“bootstrap works”)**

Θεωρήματα αυτού του τύπου είναι μόνο ασυμπτωτικά, δηλαδή για . Αυτό είναι απαραίτητο ώστε (“Α” παραπάνω).



Για παράδειγμα μπορεί να δείξει κανείς ότι:



**Θεώρημα:** Έστω και  με  συνεχώς παραγωγίσιμη στο , και. Τότε: 



Ή γενικότερα ότι:



**Θεώρημα:** **Αν η είναι παραγωγίσιμη κατά Hadamard** και , τότε





Για παράδειγμα τα παραπάνω θεωρήματα ΔΕΝ καλύπτουν την εκτίμηση της πυκνότητας των  (βλ. προηγούμενο κεφάλαιο).



Μπορεί όμως να αποδειχτεί ότι το bootstrap δουλεύει σε περιπτώσεις όπου δε δουλεύει το Jackknife π.χ. στην εκτίμηση της διακύμανσης της διάμεσου το bootstrap είναι συνεπές ενώ το jackknife δεν είναι.

Θεωρήματα σαν τα παραπάνω εξασφαλίζουν ότι δ.ε. κατασκευασμένο με bootstrap θα έχουν ασυμπτωτικά την ονομαστική πιθανότητα κάλυψης, δηλ. 

Ένας άλλος τύπος θεωρημάτων αφορούν το ερώτημα «**πόσο γρήγορη είναι αυτή η σύγκλιση** ανάλογα με τον τρόπο κατασκευής των δ.ε.». Αυτά μας επιτρέπουν να πούμε ποιες μέθοδοι κατασκευής bootstrap-δ.ε. είναι «καλύτερες» από τις άλλες και πως αυτές συγκρίνονται με τις ασυμπτωτικές μεθόδους.

Έτσι, εiδικά στη περίπτωση που μας ενδιαφέρουν «μονόπλευρα» δ.ε. της μορφής

 και θέλουμε  ανάλογα με τη μέθοδο κατασκευής του  το «λάθος» μεταξύ πραγματικής πιθανότητας κάλυψης και ονομαστικής  συγκλίνει στο 0 με ταυτότητες που περιγράφονται από:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |
|  |  |

Δες Παπασταμούλης σελ. 30

Άρα περιμένουμε **οι δύο τελευταίες μέθοδοι να είναι ακριβέστερες για πεπερασμένο  από τις πρώτες**. Ωστόσο η πρώτη υποθέτει τρόπο εκτίμησης τη διακύμανσης και η δεύτερη τρόπο εκτίμησης της μεροληψίας και της variance acceleration.