### “M-estimators”



* In the speed-of-light example, **removing the two lowest observations causes the mean to change from 26.2 to 27.75, a change of 1.55**.
* The estimate of scale produced by the Qi method is 6.3. We can divide this by the square root of the sample size to get a robust standard error, and we find this quantity to be 0.78. Thus, **the change in the mean resulting from removing two** [**outliers**](https://en.wikipedia.org/wiki/Outliers) **is approximately twice the robust standard error.**
* **The 10% trimmed mean for the speed-of-light data is 27.43**. **Removing the two lowest observations and recomposing gives 27.67**. Clearly, the trimmed mean is less affected by the outliers and has a higher breakdown point.
* Notice that **if we replace the lowest observation, −44, by −1000, the mean becomes 11.73, whereas the 10% trimmed mean is still 27.43.**

**Median:**

med<- median(my.sample)

med **27**

Fn.hat<-ecdf(my.sample)

bndwdth<-1.5

dens.at.med<- (Fn.hat(med+bndwdth)-Fn.hat(med-bndwdth))/(2\*bndwdth)

median.se <- 1/(2\*dens.at.med \*sqrt(ss))

median.se **0.6770032**

Use:  and 

**M-estimators:**

**Robust εκτιμήτριες**, ξεκινώντας από την ιδέα των mle:

Αν είχαμε  τότε η MLE.

Αδιαφορώντας για τη κατανομή και τη πιθανοφάνεια ξεκινάμε από μια συνάρτηση  **που μετράει την απόσταση μεταξύ**  **και** και

**ορίζουμε την εκτιμήτρια** **.**

Π.χ. Αν παίρνουμε την MLE για κανονικά δεδομένα.

**Ιδέα:** Αν **διαλέξουμε**  **που «τιμωρεί» λιγότερο από τη τετραγωνική απόσταση** ίσως πάρουμε πιο ανθεκτική (robust) εκτιμήτρια

(με τετραγωνική παίρνουμε , που δεν είναι robust)

Παραδείγματα…



* Αν  παραγωγίσιμη θέτουμε  και τότε το  είναιεκείνο για το οποίο

.



αποδεικνύεται ότι **η συνάρτηση επιρροής** της εκτιμήτριας  δίνεται από

 όπου  και



η οποία είναι **φραγμένη στο**  **για φραγμένα** **(robustness)**

Μπορούμε να ελέγξουμε το φράγμα της συνάρτησης επιρροής με κατάλληλη επιλογή του .





**M estimators for location and scale**

**Huber’s psi with k=1.5**

**Μέθοδος εκτίμησης:**

 ή ισοδύναμα 

Με  και  (MAD)  αν 

my.rlm <- **rlm**(my.sample~1,method="M",psi=psi.**huber**,k=**1.5**,scale.est="MAD")

summary( my.rlm )

Coefficients:

 Value Std. Error t value Std. Error our calcul

(Intercept) **27.4105 0.6789** 40.3762 **0.6714**

Residual standard error: 5.056 on 65 degrees of freedom



loc<-my.rlm$coefficients[1]

scl<- my.rlm$s

u<-(my.sample-loc)/scl

ss<-length(u)

s1<-mean((u\*my.rlm$psi(u,deriv=0))^2)

s2<-mean((my.rlm$psi(u,deriv=1)))

stdev <- (scl)\*sqrt(s1)/(s2\*sqrt(ss))

stdev **0.6714198**

Use:

 όπου  και



,



Thus: 



**M estimators for location and scale**

**Tukey’s biweight with c=4.685**

my.rlm <- **rlm**(my.sample~1,method="M",**psi=psi.bisquare**,c=**4.685**,scale.est="MAD")

summary( my.rlm )

Coefficients:

 Value Std. Error t value Std. Error our calcul

(Intercept) 27.6722 **0.6408** 43.1817 **0.6340**

Residual standard error: 5.189 on 65 degrees of freedom



Summary:

Simple mean 26.2 our calcul: 26.2

Simple mean excl outliers 27.75 our calcul: 27.75

10% Trimmed mean 27.43 our calcul: 27.26

10% Trimmed mean excl outliers 27.67 our calcul: 27.51

Median 27 (+- 1.96 \* 0.667)

M-estimate (huber, k=1.5) 27.41 (+- 1.96 \* 0.679)

M-estimate (biweight, c=3) 27.67 (+- 1.96 \* 0.641)

**Ανθεκτική *παλινδρόμηση*:M-estimators**

**Μέθοδος εκτίμησης:**

 ή ισοδύναμα 

Με  και  (MAD)  αν 

**Ιδιότητες:**

* Μειώνει επίδραση έκτοπων παρατηρήσεων, ιδίως αν η ψ ξανακατεβαίνει στο 0 (τότε δεν θα έχει όμως μοναδικές λύσεις και χρειάζεται καλή αρχική τιμή).
* Υψηλή αποδοτικότητα σχετικά με ΕΤ (95% για k=1.345 στο psi.Huber και για c=4.685 στο psi.Tukey)
* Breakdownpoint = 0%, εξαιτίας των leverage points



**Υλοποίηση στην R:**

**rlm()** με παραμέτρους **psi=…, scale.est=…,** κλπ**.**

**Ανθεκτική παλινδρόμηση: least median of squares (lms)**

**Μέθοδος εκτίμησης:**



**Ιδιότητες:**

* Πολύ ανθεκτική: Breakdownpoint=50%.
* Πολύ χαμηλή αποδοτικότητα: - συνεπής αντί για .

**Υλοποίηση στην R:**

**lqs()** με παράμετρο **method=”lms”**

**Ανθεκτικήπαλινδρόμηση: least trimmed squares (lts)**

**Μέθοδος εκτίμησης:**



Το άθροισμα των μικρότερων απόλυτων καταλοίπων στο τετράγωνο. (Όλα μαζί θα ληταν το RSS. Αγνοούμε τα μεγαλύτερα…Άρα Ανθεκτική εκτιμήτρια κλιμακας.

**Ιδιότητες:**

* Συνάρτηση επιρροής φραγμένη
* Πολύ ανθεκτική: Breakdownpoint .
* Καλύτερη αποδοτικότητα από lms: - συνεπής και όσο ένας M-estimator περικομμένος στα τεταρτημόρια. Όμως αποδοτικότητα ακόμα χαμηλή <10%
* Επηρεάζεται λίγο από έκτοπες παρατηρήσεις

**Υλοποίηση στην R: lqs()** με παράμετρο **method=”lts”**

**Ανθεκτικήπαλινδρόμηση:S-estimation**

**Εισαγωγή: εκτίμηση κλιμακας (σ)**

* Έστω . Θέλουμε εκτίμηση του .
* Με  έχουμε  και άρα 
* Ορίζουμε εκτιμήτρια  του ως εκείνη για την οποία .
* Για ανθεκτική εκτιμήτρια θα παίρναμε «άλλο» , π.χ. την Tukey biweight) και θα είχαμε .
* Τότε θα παίρναμε εκτιμήτρια  του ως εκείνη για την οποία .

**Μέθοδος εκτίμησης:**

Για  βρες τέτοιο ώστε ,

με την Tukey biweight, δηλ σταθερή για και .

και τέλος 

**Συζήτηση**

* H lts ελαχιστοποιεί μια ανθεκτική εκτιμήτρια κλίμακας, την 
* Ιδέα εδώ: πάρε **πιο** **αποδοτική** ανθεκτική εκτιμήτρια κλίμακας, μία M-εκτιμήτρια κλίμακας των καταλοίπων, αυτην που ελαχιστοποιεί την

,

με την Tukey biweight, δηλ σταθερή gia 

**Ιδιότητες:**

* Συνάρτηση επιρροής φραγμένη
* Πολύ ανθεκτική: Breakdownpoint 50% και
* ψηλή αποδοτικότητα: - συνεπής. Όμως αποδοτικότητα ακόμα ενδεχομένως χαμηλή <35%.
* Επηρεάζεται λίγο από έκτοπες παρατηρήσεις





**Υλοποίηση στην R:**

**lqs()** με παράμετρο **method=”S”**

**Ανθεκτικήπαλινδρόμηση:MM-estimation**

**Μέθοδος εκτίμησης:**

1. Βρές αρχική εκτιμήτρια  με κάποια μέθοδο, υψηλού breakdownpoint(αδιαφορώντας για αποδοτικότητα), π.χ. lts
2. Bρες  τέτοιο ώστε , με σταθερή για και . (όπως στα S-estimators)
3. Βρες Μ-εκτιμήτρια  του  , με  να αντιστοιχεί πάλι στη biweight (δηλαδή η ρ ξανακατεβαίνει στο 0).

**Χρήση:**

* Διάλεξε τις παραμέτρους του βήματος 2 (S-estimators) ώστε να έχουμε ψηλό Breakdownpoint
* και τις παραμέτρους του βήματος 3 ώστε να έχουμε ψηλή αποδοτικότητα

**Ιδιότητες:**

* Πολύ ανθεκτική: Breakdownpoint 50% αν  έχει Breakdownpoint 50% .
* ψηλή αποδοτικότητα όσο κοντά στο 100% θέλουμε: εξαρτάται από επιλογή παραμέτρων στο «3».

**Υλοποίηση στην R:rlm()** με **method=”ΜΜ”**

****





****







