Συμπερασματολογία για συναρτησιακά της F

Μη Παραμετρική Στατιστική

Παναγιώτης Παπασταμούλης
Επίκουρος Καθηγητής
Τμήμα Στατιστικής ΟΠΑ

papastamoulis@aueb.gr

Παρασκευή, 03/04/2020

Υπενθύμιση: Εκτίμηση αθροιστικής συνάρτησης κατανομής

- Εστω $X_1, \ldots, X_n$ τυχαίο δείγμα από κάποια (άγνωστη) συνάρτηση κατανομής F.
- Η F εκτιμάται από την εμπειρική συνάρτηση κατανομής $\widehat{F}_n$

Ορισμός (Εμπειρική συνάρτηση κατανομής)

Η εμπειρική συνάρτηση κατανομής ορίζεται ως

$$\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}\{X_i \leqslant x\}. \tag{1}$$

Στον παραπάνω ορισμό:

$$\mathrm{I}\{X_i \leqslant x\} = \begin{cases} 1, & \text{αν } X_i \leqslant x \\ 0, & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εκτίμηση συναρτησιακών της συνάρτησης κατανομής

- Ενδιαφερόμαστε για την εκτίμηση παραμέτρων που γράφονται ως συναρτήσεις της συνάρτησης κατανομής F, δηλαδή: $T(F)$ όπου T συνάρτηση της F.
  - Μέσος: $\mu = \mathrm{E}(X_1)$ γράφεται ως

$$\mu = \int x \mathrm{d}F = \begin{cases} \int x f(x) \mathrm{d}x, & \text{αν } X_1 \text{ συνεχής} \\ \sum x f(x), & \text{αν } X_1 \text{ διακριτή} \end{cases}$$

    όπου στην συνεχή περίπτωση: $f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}$ ενώ στην διακριτή περίπτωση $f(x) = \mathrm{P}(X_1 = x) = F(x) - F(x^-)$.
  - (κάτω) α-ποσοστιαίο σημείο: $q_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \inf\{x : F(x) \geqslant \alpha\}$.
- Εκτός από τη σημειακή εκτίμηση παραμέτρων, ενδιαφέρει και η συμπερασματολογία
  - Εκτίμηση διασποράς/τυπικών σφαλματών του εκτιμητή
  - Κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για την παράμετρο.

Εκτιμητής αντικατάστασης (plug-in estimator)

Ορισμός (plug-in estimator)

Ο εκτιμητής αντικατάστασης (plug-in estimator) $\widehat{\theta}_n$ *της* $\theta = T(F)$ *ορίζεται ως*

$$\widehat{\theta}_n := T(\widehat{F}_n).$$

Εκτιμητής αντικατάστασης (plug-in estimator)

Ορισμός (plug-in estimator)

Ο εκτιμητής αντικατάστασης (plug-in estimator) $\widehat{\theta}_n$ *της* $\theta = T(F)$ *ορίζεται ως*

$$\widehat{\theta}_n := T(\widehat{F}_n).$$

- Ο εκτιμητής αντικατάστασης προκύπτει απλά αντικαθιστώντας την F με την $\widehat{F}_n$ στη συνάρτηση T.

Εκτιμητής αντικατάστασης (plug-in estimator)

Ορισμός (plug-in estimator)

Ο εκτιμητής αντικατάστασης (plug-in estimator) $\widehat{\theta}_n$ *της* $\theta = T(F)$ *ορίζεται ως*

$$\widehat{\theta}_n := T(\widehat{F}_n).$$

- Ο εκτιμητής αντικατάστασης προκύπτει απλά αντικαθιστώντας την F με την $\widehat{F}_n$ στη συνάρτηση T.
- Σε πολλές περιπτώσεις παίρνουμε ως εκτιμητή το δειγματικό «εμπειρικό» ανάλογο της ποσότητας που μας ενδιαφέρει.

Εκτιμητής αντικατάστασης (plug-in estimator)

Ορισμός (plug-in estimator)

Ο εκτιμητής αντικατάστασης (plug-in estimator) $\widehat{\theta}_n$ *της* $\theta = T(F)$ *ορίζεται ως*

$$\widehat{\theta}_n := T(\widehat{F}_n).$$

- Ο εκτιμητής αντικατάστασης προκύπτει απλά αντικαθιστώντας την F με την $\widehat{F}_n$ στη συνάρτηση T.
- Σε πολλές περιπτώσεις παίρνουμε ως εκτιμητή το δειγματικό «εμπειρικό» ανάλογο της ποσότητας που μας ενδιαφέρει.
- Προσοχή:
  - Η πραγματική (F) είναι συνάρτηση κατανομής η οποία, γενικά, μπορεί να είναι συνεχής/διακριτή.
  - Η εμπειρική ($\widehat{F}_n$) είναι διακριτή: θέτει μάζα $1/n$ σε κάθε μία από τις n τιμές του δείγματος.

Γραμμικά συναρτησιακά

Ορισμός (Γραμμικά συναρτησιακά)

Ένα συναρτησιακό της μορφής $T(F) = \int \alpha(x)\mathrm{d}F(x)$ *καλείται γραμμικό συναρτησιακό.*

Γραμμικά συναρτησιακά

Ορισμός (Γραμμικά συναρτησιακά)

Ένα συναρτησιακό της μορφής $T(F) = \int \alpha(x)\mathrm{d}F(x)$ καλείται γραμμικό συναρτησιακό.

- Υπενθύμιση:

$$\int \alpha(x)\mathrm{d}F(x) = \begin{cases} \int \alpha(x) f(x)\mathrm{d}x, & \text{(συνεχής περίπτωση)} \\ \sum_j x_j f(x_j), & \text{(διακριτή περίπτωση)} \end{cases}$$

Γραμμικά συναρτησιακά

Ορισμός (Γραμμικά συναρτησιακά)

Ένα συναρτησιακό της μορφής $T(F) = \int \alpha(x)\mathrm{d}F(x)$ καλείται γραμμικό συναρτησιακό.

- Υπενθύμιση:

$$\int \alpha(x)\mathrm{d}F(x) = \begin{cases} \int \alpha(x)f(x)\mathrm{d}x, & \text{(συνεχής περίπτωση)} \\ \sum_j x_j f(x_j), & \text{(διακριτή περίπτωση)} \end{cases}$$

- Επειδή $\widehat{F}_n$ διακριτή, ο **εκτιμητής αντικατάστασης για ένα γραμμικό συναρτησιακό** $T(F) = \int \alpha(x)\mathrm{d}F(x)$ είναι

$$T(\widehat{F}_n) = \int \alpha(x)\mathrm{d}\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i).$$

Παράδειγμα Ι: μέση τιμή

- Έστω $\mu = T(F) = \int x \mathrm{d}F$.

Παράδειγμα Ι: μέση τιμή

- Έστω $\mu = T(F) = \int x \mathrm{d}F$.
- Είναι γραμμικό συναρτησιακό της F με $\alpha(x) = x$.

Παράδειγμα I: μέση τιμή

- Έστω $\mu = T(F) = \int x \mathrm{d}F$.
- Είναι γραμμικό συναρτησιακό της F με $\alpha(x) = x$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης:

$$\widehat{\mu} = \int x \mathrm{d}\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n.$$

Παράδειγμα Ι: μέση τιμή

- Έστω $\mu = T(F) = \int x \mathrm{d}F$.
- Είναι γραμμικό συναρτησιακό της F με $\alpha(x) = x$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης:

$$\widehat{\mu} = \int x \mathrm{d}\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n.$$

- Είναι $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$

Παράδειγμα Ι: μέση τιμή

- Έστω $\mu = T(F) = \int x \mathrm{d}F$.
- Είναι γραμμικό συναρτησιακό της F με $\alpha(x) = x$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης:

$$\widehat{\mu} = \int x \mathrm{d}\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n.$$

- Είναι $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
- Τυπικό σφάλμα: $\mathrm{se} = \sqrt{\mathrm{Var}(\widehat{\mu})} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Παράδειγμα Ι: μέση τιμή

- Έστω $\mu = T(F) = \int x \mathrm{d}F$.
- Είναι γραμμικό συναρτησιακό της F με $\alpha(x) = x$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης:

$$\widehat{\mu} = \int x \mathrm{d}\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n.$$

- Είναι $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
- Τυπικό σφάλμα: $\mathrm{se} = \sqrt{\mathrm{Var}(\widehat{\mu})} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- Έστω $\widehat{\sigma}$ εκτιμητής του σ.

Παράδειγμα Ι: μέση τιμή

- Έστω $\mu = T(F) = \int x \mathrm{d}F$.
- Είναι γραμμικό συναρτησιακό της F με $\alpha(x) = x$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης:

$$\widehat{\mu} = \int x \mathrm{d}\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n.$$

- Είναι $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
- Τυπικό σφάλμα: $\mathrm{se} = \sqrt{\mathrm{Var}(\widehat{\mu})} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- Έστω $\widehat{\sigma}$ εκτιμητής του σ.
- Plug-in εκτιμητής του τυπικού σφάλματος: $\widehat{\mathrm{se}} = \dfrac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}$.

Παράδειγμα Ι: μέση τιμή

- Έστω $\mu = T(F) = \int x \mathrm{d}F$.
- Είναι γραμμικό συναρτησιακό της F με $\alpha(x) = x$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης:

$$\widehat{\mu} = \int x \mathrm{d}\widehat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X}_n.$$

- Είναι $\mathrm{Var}(\widehat{\mu}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$
- Τυπικό σφάλμα: $\mathrm{se} = \sqrt{\mathrm{Var}(\widehat{\mu})} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
- Έστω $\widehat{\sigma}$ εκτιμητής του σ.
- Plug-in εκτιμητής του τυπικού σφάλματος: $\widehat{\mathrm{se}} = \dfrac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}$.
- $100(1-\alpha)\%$ διάστημα εμπιστοσύνης (ασυμπτωτικό) για το $\mu = T(F)$

$$\left[\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right].$$

Παράδειγμα ΙΙ: διασπορά

- Έστω $\sigma^2 = T(F) = \int (x-\mu)^2 \mathrm{d}F$.

Παράδειγμα ΙΙ: διασπορά

- Έστω $\sigma^2 = T(F) = \int (x-\mu)^2 \mathrm{d}F$.
- Επειδή $\mu = \int x \mathrm{d}F(x)$, ισχύει ότι $\sigma^2 = \int x^2 \mathrm{d}F(x) - \left(\int x \mathrm{d}F(x)\right)^2$.

Παράδειγμα ΙΙ: διασπορά

- Έστω $\sigma^2 = T(F) = \int (x-\mu)^2 \mathrm{d}F$.
- Επειδή $\mu = \int x \mathrm{d}F(x)$, ισχύει ότι $\sigma^2 = \int x^2 \mathrm{d}F(x) - \left(\int x \mathrm{d}F(x)\right)^2$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^2 &= \int x^2 \mathrm{d}\widehat{F}_n(x) - \left(\int x \mathrm{d}\widehat{F}_n(x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu})^2.
\end{aligned}$$

Παράδειγμα II: διασπορά

- Έστω $\sigma^2 = T(F) = \int (x-\mu)^2 \mathrm{d}F$.
- Επειδή $\mu = \int x \mathrm{d}F(x)$, ισχύει ότι $\sigma^2 = \int x^2 \mathrm{d}F(x) - \left(\int x \mathrm{d}F(x)\right)^2$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης:

$$\begin{aligned}
\widehat{\sigma}^2 &= \int x^2 \mathrm{d}\widehat{F}_n(x) - \left(\int x \mathrm{d}\widehat{F}_n(x)\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu})^2.
\end{aligned}$$

- Παρατηρήστε ότι $\widehat{\sigma}^2 \neq S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

Παράδειγμα III: λοξότητα

- Έστω μ και σ^2 η μέση τιμή και διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X.

Παράδειγμα ΙΙΙ: λοξότητα

- Έστω μ και σ^2 η μέση τιμή και διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X.
- Η λοξότητα ορίζεται ως

$$\kappa = \frac{\mathrm{E}(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\int (x-\mu)^3 \mathrm{d}F(x)}{\left\{\int (x-\mu)^2 \mathrm{d}F(x)\right\}^{3/2}}$$

και μετράει την ασυμμετρία της κατανομής της X.

Παράδειγμα ΙΙΙ: λοξότητα

- Έστω μ και σ^2 η μέση τιμή και διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X.
- Η λοξότητα ορίζεται ως

$$\kappa = \frac{\mathrm{E}(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\int (x-\mu)^3 \mathrm{d}F(x)}{\left\{\int (x-\mu)^2 \mathrm{d}F(x)\right\}^{3/2}}$$

  και μετράει την ασυμμετρία της κατανομής της X.
- Έχουμε ότι $\widehat{\mu} = \overline{X}_n$ και $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\mu})^2$.

Παράδειγμα III: λοξότητα

- Έστω μ και σ^2 η μέση τιμή και διασπορά της τυχαίας μεταβλητής X.
- Η λοξότητα ορίζεται ως

$$\kappa = \frac{\mathrm{E}(X-\mu)^3}{\sigma^3} = \frac{\int (x-\mu)^3 \mathrm{d}F(x)}{\left\{\int (x-\mu)^2 \mathrm{d}F(x)\right\}^{3/2}}$$

  και μετράει την ασυμμετρία της κατανομής της X.
- Έχουμε ότι $\widehat{\mu} = \overline{X}_n$ και $\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \widehat{\mu})^2$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης του κ

$$\widehat{\kappa} = \frac{\int (x-\mu)^3 \mathrm{d}\widehat{F}_n(x)}{\left\{\int (x-\mu)^2 \mathrm{d}\widehat{F}_n(x)\right\}^{3/2}} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \widehat{\mu})^3}{\widehat{\sigma}^3}.$$

Εφαρμογή

Έστω τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 10$:

$$(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14).$$

Να υπολογιστούν οι εκτιμητές αντικατάστασης για τη μέση τιμή, διασπορά και λοξότητα της κατανομής των δεδομένων και ένα 95% Α.Δ.Ε για τη μέση τιμή.

Εφαρμογή

Έστω τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 10$:

$$(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14).$$

Να υπολογιστούν οι εκτιμητές αντικατάστασης για τη μέση τιμή, διασπορά και λοξότητα της κατανομής των δεδομένων και ένα 95% Α.Δ.Ε για τη μέση τιμή.

- $\widehat{\mu} = 0.21$

Εφαρμογή

Έστω τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 10$:

$$(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14).$$

Να υπολογιστούν οι εκτιμητές αντικατάστασης για τη μέση τιμή, διασπορά και λοξότητα της κατανομής των δεδομένων και ένα 95% Α.Δ.Ε για τη μέση τιμή.

- $\widehat{\mu} = 0.21$
- $\widehat{\sigma}^2 \approx 0.87$ (παρατηρήστε ότι αυτό είναι διαφορετικό του S_n^2)

Εφαρμογή

Έστω τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 10$:

$$(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14).$$

Να υπολογιστούν οι εκτιμητές αντικατάστασης για τη μέση τιμή, διασπορά και λοξότητα της κατανομής των δεδομένων και ένα 95% Α.Δ.Ε για τη μέση τιμή.

- $\widehat{\mu} = 0.21$
- $\widehat{\sigma}^2 \approx 0.87$ (παρατηρήστε ότι αυτό είναι διαφορετικό του S_n^2)
- $\widehat{\kappa} \approx 0.54$

  Παρατήρηση: η παραπάνω εκτίμηση της λοξότητας υπολογίζεται στην `R` μέσω της εντολής **`skewness(x, type = 1)`** του πακέτου `'e1071'`.

Εφαρμογή

Έστω τυχαίο δείγμα μεγέθους $n = 10$:

$$(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14).$$

Να υπολογιστούν οι εκτιμητές αντικατάστασης για τη μέση τιμή, διασπορά και λοξότητα της κατανομής των δεδομένων και ένα 95% Α.Δ.Ε για τη μέση τιμή.

- $\widehat{\mu} = 0.21$
- $\widehat{\sigma}^2 \approx 0.87$ (παρατηρήστε ότι αυτό είναι διαφορετικό του S_n^2)
- $\widehat{\kappa} \approx 0.54$

  Παρατήρηση: η παραπάνω εκτίμηση της λοξότητας υπολογίζεται στην `R` μέσω της εντολής `skewness(x, type = 1)` του πακέτου `'e1071'`.
- 95% Α.Δ.Ε για το μ: $[-0.37, 0.79]$

  Παρατήρηση: η εκτίμηση του τυπικού σφάλματος του δειγματικού μέσου υπολογίστηκε ως:

$$\widehat{\mathrm{se}} = \frac{\widehat{\sigma}}{\sqrt{n}} \approx \frac{\sqrt{0.87}}{\sqrt{10}} \approx 0.31.$$

Παράδειγμα IV: συντελεστής συσχέτισης

- Έστω $Z = (X, Y)$ διδιάστατη τυχαία μετάβλητη με συνάρτηση κατανομής $F(x, y)$.

Παράδειγμα IV: συντελεστής συσχέτισης

- Έστω $Z = (X, Y)$ διδιάστατη τυχαία μετάβλητη με συνάρτηση κατανομής $F(x, y)$.
- Συντελεστής συσχέτισης $\rho = T(F) = \frac{\mathrm{E}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}(XY)-\mu_X \mu_Y}{\sigma_X \sigma_Y}$

Παράδειγμα IV: συντελεστής συσχέτισης

- Έστω $Z = (X, Y)$ διδιάστατη τυχαία μετάβλητη με συνάρτηση κατανομής $F(x, y)$.
- Συντελεστής συσχέτισης $\rho = T(F) = \frac{\mathrm{E}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}(XY)-\mu_X\mu_Y}{\sigma_X \sigma_Y}$
- Προφανώς $T(F) = g(T_1(F), T_2(F), T_3(F), T_4(F), T_5(F))$, όπου
  $T_1(F) = \int x \mathrm{d}F(z) \quad T_2(F) = \int y \mathrm{d}F(z) \quad T_3(F) = \int xy \mathrm{d}F(z)$
  $T_4(F) = \int x^2 \mathrm{d}F(z) \quad T_5(F) = \int y^2 \mathrm{d}F(z)$
  και
  $$g(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = \frac{t_3 - t_1 t_2}{\sqrt{\left(t_4 - t_1^2\right)\left(t_5 - t_2^2\right)}}.$$

Παράδειγμα IV: συντελεστής συσχέτισης

- Έστω $Z=(X,Y)$ διδιάστατη τυχαία μετάβλητη με συνάρτηση κατανομής $F(x,y)$.
- Συντελεστής συσχέτισης $\rho = T(F) = \frac{\mathrm{E}(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\mathrm{E}(XY)-\mu_X\mu_Y}{\sigma_X\sigma_Y}$
- Προφανώς $T(F) = g(T_1(F), T_2(F), T_3(F), T_4(F), T_5(F))$, όπου
  $T_1(F)=\int x\mathrm{d}F(z) \quad T_2(F)=\int y\mathrm{d}F(z) \quad T_3(F)=\int xy\mathrm{d}F(z)$
  $T_4(F)=\int x^2\mathrm{d}F(z) \quad T_5(F)=\int y^2\mathrm{d}F(z)$
  και
  $$g(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5) = \frac{t_3-t_1t_2}{\sqrt{\left(t_4-t_1^2\right)\left(t_5-t_2^2\right)}}.$$
- Αντικαθιστώντας την F με $\widehat{F}_n$ στις $T_1(F), T_2(F), T_3(F), T_4(F), T_5(F)$ προκύπτει ότι ο εκτιμητής αντικατάστασης είναι
  $$\begin{aligned}\widehat{\rho} &= g(T_1(\widehat{F}_n), T_2(\widehat{F}_n), T_3(\widehat{F}_n), T_4(\widehat{F}_n), T_5(\widehat{F}_n))\\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (X_i-\overline{X}_n)(Y_i-\overline{Y}_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(X_i-\overline{X}_n\right)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(Y_i-\overline{Y}_n\right)^2}}\end{aligned}$$
  δηλαδή ο *δειγματικός συντελεστής συσχέτισης*.

Παράδειγμα V: ποσοστιαία σημεία

- Υπενθύμιση ορισμού: (κάτω) p-ποσοστιαίο σημείο
  - Για F γνησίως αύξουσα $q_p = F^{-1}(p)$
  - δηλαδή το q_p είναι το μοναδικό μέλος του συνόλου $\{x : F(x) = p\}$
  - Γενικός ορισμός μέσω γενικευμένης αντίστροφης συνάρτησης: $q_p = F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geqslant p\}$, $p \in (0, 1)$.

Παράδειγμα V: ποσοστιαία σημεία

- Υπενθύμιση ορισμού: (κάτω) p-ποσοστιαίο σημείο
  - Για F γνησίως αύξουσα $q_p = F^{-1}(p)$
  - δηλαδή το q_p είναι το μοναδικό μέλος του συνόλου $\{x : F(x) = p\}$
  - Γενικός ορισμός μέσω γενικευμένης αντίστροφης συνάρτησης: $q_p = F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geqslant p\}$, $p \in (0, 1)$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης

$$\begin{aligned} \widehat{q}_p &= \widehat{F}_n^{-1}(p) \\ &= \inf\{x : \widehat{F}_n(x) \geqslant p\} \\ &= X_{[j]} \end{aligned}$$

όπου

- $(X_{[1]}, \ldots, X_{[n]})$ είναι το διατεταγμένο δείγμα
- j ο δείκτης για τον οποίον $\dfrac{j-1}{n} < p \leqslant \dfrac{j}{n}$

Παράδειγμα V: ποσοστιαία σημεία

- Υπενθύμιση ορισμού: (κάτω) p-ποσοστιαίο σημείο
  - Για F γνησίως αύξουσα $q_p = F^{-1}(p)$
  - δηλαδή το q_p είναι το μοναδικό μέλος του συνόλου $\{x : F(x) = p\}$
  - Γενικός ορισμός μέσω γενικευμένης αντίστροφης συνάρτησης: $q_p = F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \geqslant p\}$, $p \in (0,1)$.
- Εκτιμητής αντικατάστασης

$$\begin{aligned}\widehat{q}_p &= \widehat{F}_n^{-1}(p) \\ &= \inf\{x : \widehat{F}_n(x) \geqslant p\} \\ &= X_{[j]}\end{aligned}$$

  όπου
  - $(X_{[1]}, \ldots, X_{[n]})$ είναι το διατεταγμένο δείγμα
  - j ο δείκτης για τον οποίον $\dfrac{j-1}{n} < p \leqslant \dfrac{j}{n}$
- Το $\widehat{q}_p$ είναι το *δειγματικό (κάτω) p-ποσοστιαίο σημείο.*

Παράδειγμα V: ποσοστιαία σημεία

- Παράδειγμα: ο εκτιμητής του $q_{0.5}$ (διάμεσος)

$$\begin{aligned}\widehat{q}_{0.5} &= \widehat{F}_n^{-1}(0.5) \\ &= \inf\{x : \widehat{F}_n(x) \geqslant 0.5\} \\ &= \begin{cases} X_{[n/2]}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ X_{[(n+1)/2]}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}\end{aligned}$$

Παράδειγμα V: ποσοστιαία σημεία

- Παράδειγμα : ο εκτιμητής του $q_{0.5}$ (διάμεσος)

$$\begin{aligned}\widehat{q}_{0.5} &= \widehat{F}_n^{-1}(0.5) \\ &= \inf\{x : \widehat{F}_n(x) \geqslant 0.5\} \\ &= \begin{cases} X_{[n/2]}, & \text{αν } n \text{ άρτιος} \\ X_{[(n+1)/2]}, & \text{αν } n \text{ περιττός} \end{cases}\end{aligned}$$

- Παράδειγμα : εκτιμητής του $q_{0.9}$

$$\begin{aligned}\widehat{q}_{0.9} &= \widehat{F}_n^{-1}(0.9) \\ &= \inf\{x : \widehat{F}_n(x) \geqslant 0.9\} \\ &= X_{[j]}\end{aligned}$$

όπου j ο δείκτης για τον οποίον : $\frac{j-1}{n} < 0.9 \leqslant \frac{j}{n}$. Πχ:
  - Αν $n = 10$: $\widehat{q}_{0.9} = X_{[9]}$ διότι : $\frac{9-1}{10} = 0.8 < 0.9 \leqslant \frac{9}{10} = 0.9$.
  - Αν $n = 11$: $\widehat{q}_{0.9} = X_{[10]}$ διότι : $\frac{10-1}{11} \approx 0.82 < 0.9 \leqslant \frac{10}{11} \approx 0.91$.

Παράδειγμα V: ποσοστιαία σημεία

- Παράδειγμα: ο εκτιμητής του $q_{0.5}$ (διάμεσος)

$$\begin{aligned}\widehat{q}_{0.5} &= \widehat{F}_n^{-1}(0.5)\\ &= \inf\{x : \widehat{F}_n(x) \geqslant 0.5\}\\ &= \begin{cases} X_{[n/2]}, & \text{αν } n \text{ άρτιος}\\ X_{[(n+1)/2]}, & \text{αν } n \text{ περιττός}\end{cases}\end{aligned}$$

- Παράδειγμα: εκτιμητής του $q_{0.9}$

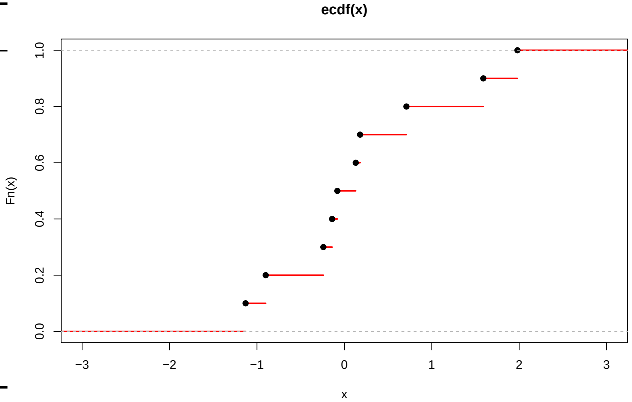
$$\begin{aligned}\widehat{q}_{0.9} &= \widehat{F}_n^{-1}(0.9)\\ &= \inf\{x : \widehat{F}_n(x) \geqslant 0.9\}\\ &= X_{[j]}\end{aligned}$$

  όπου j ο δείκτης για τον οποίον: $\frac{j-1}{n} < 0.9 \leqslant \frac{j}{n}$. Πχ:
  - Αν $n = 10$: $\widehat{q}_{0.9} = X_{[9]}$ διότι: $\frac{9-1}{10} = 0.8 < 0.9 \leqslant \frac{9}{10} = 0.9$.
  - Αν $n = 11$: $\widehat{q}_{0.9} = X_{[10]}$ διότι: $\frac{10-1}{11} \approx 0.82 < 0.9 \leqslant \frac{10}{11} \approx 0.91$.
- Παρατήρηση: στην R `quant(..., type = 1)`.

Παράδειγμα V: ποσοστιαία σημεία

Δεδομένα: $(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14)$

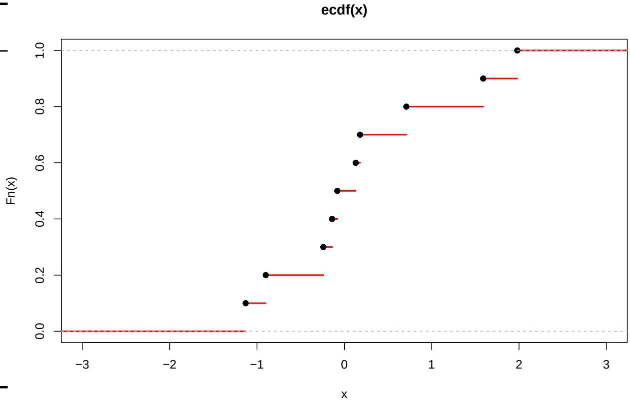
x	$\widehat{F}_n(x)$
$(-\infty, -1.13)$	0
$[-1.13, -0.90)$	$1/10$
$[-0.90, -0.24)$	$2/10$
$[-0.24, -0.14)$	$3/10$
$[-0.14, -0.08)$	$4/10$
$[-0.08, 0.13)$	$5/10$
$[0.13, 0.18)$	$6/10$
$[0.18, 0.71)$	$7/10$
$[0.71, 1.59)$	$8/10$
$[1.59, 1.98)$	$9/10$
$[1.98, \infty)$	1



Παράδειγμα V: ποσοστιαία σημεία

Δεδομένα: $(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14)$

x	$\widehat{F}_n(x)$
$(-\infty, -1.13)$	0
$[-1.13, -0.90)$	$1/10$
$[-0.90, -0.24)$	$2/10$
$[-0.24, -0.14)$	$3/10$
$[-0.14, -0.08)$	$4/10$
$[-0.08, 0.13)$	$5/10$
$[0.13, 0.18)$	$6/10$
$[0.18, 0.71)$	$7/10$
$[0.71, 1.59)$	$8/10$
$[1.59, 1.98)$	$9/10$
$[1.98, \infty)$	1

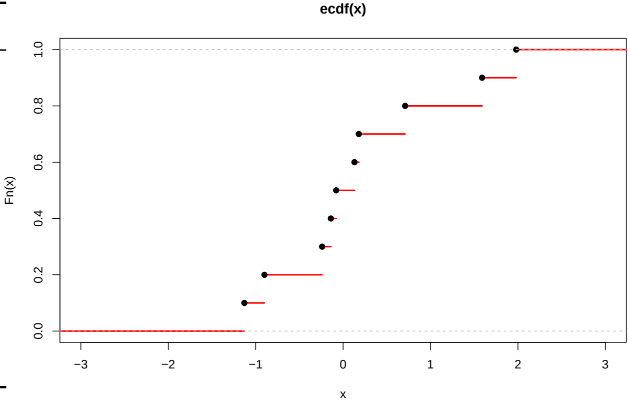


- $\widehat{q}_{0.5} = -0.08$

Παράδειγμα V: ποσοστιαία σημεία

Δεδομένα: $(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14)$

x	$\widehat{F}_n(x)$
$(-\infty, -1.13)$	0
$[-1.13, -0.90)$	$1/10$
$[-0.90, -0.24)$	$2/10$
$[-0.24, -0.14)$	$3/10$
$[-0.14, -0.08)$	$4/10$
$[-0.08, 0.13)$	$5/10$
$[0.13, 0.18)$	$6/10$
$[0.18, 0.71)$	$7/10$
$[0.71, 1.59)$	$8/10$
$[1.59, 1.98)$	$9/10$
$[1.98, \infty)$	1

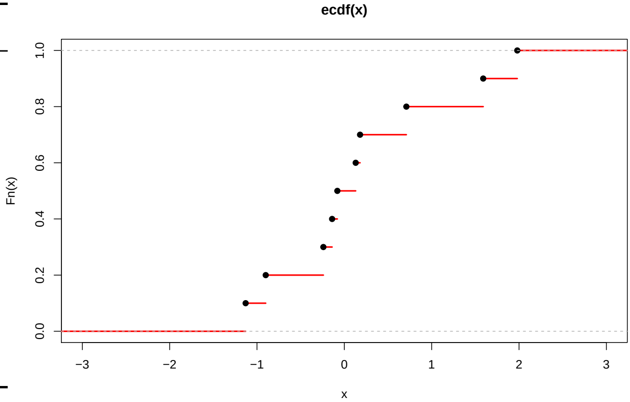


- $\widehat{q}_{0.5} = -0.08$
- $\widehat{q}_{0.9} = 1.59$

Παράδειγμα V: ποσοστιαία σημεία

Δεδομένα: $(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14)$

x	$\widehat{F}_n(x)$
$(-\infty, -1.13)$	0
$[-1.13, -0.90)$	$1/10$
$[-0.90, -0.24)$	$2/10$
$[-0.24, -0.14)$	$3/10$
$[-0.14, -0.08)$	$4/10$
$[-0.08, 0.13)$	$5/10$
$[0.13, 0.18)$	$6/10$
$[0.18, 0.71)$	$7/10$
$[0.71, 1.59)$	$8/10$
$[1.59, 1.98)$	$9/10$
$[1.98, \infty)$	1



- $\widehat{q}_{0.5} = -0.08$
- $\widehat{q}_{0.9} = 1.59$
- $\widehat{q}_{0.86} = 1.59$

Εφαρμογή: Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- Ακριβή: μέσω της διωνυμικής κατανομής
- Ασυμπτωτικά: μέθοδος Δέλτα

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- Σκοπός: κατασκευή $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε για το q_p

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- Σκοπός: κατασκευή $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε για το q_p
- Αρκεί να επιλέξουμε $r < s$ τέτοια ώστε:

$$\mathrm{P}\left(X_{[r]} < q_p \leqslant X_{[s]}\right) \geqslant 1-\alpha$$

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- Σκοπός: κατασκευή $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε για το q_p
- Αρκεί να επιλέξουμε $r < s$ τέτοια ώστε:

$$\mathrm{P}\left(X_{[r]} < q_p \leqslant X_{[s]}\right) \geqslant 1 - \alpha$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{P}\left(X_{[r]} < q_p \leqslant X_{[s]}\right) = 1 - \left\{\mathrm{P}\left(X_{[r]} \geqslant q_p\right) + \mathrm{P}\left(X_{[s]} < q_p\right)\right\}$$

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- Σκοπός: κατασκευή $100(1-\alpha)\%$ Δ.Ε για το q_p
- Αρκεί να επιλέξουμε $r < s$ τέτοια ώστε:

$$\mathrm{P}\left(X_{[r]} < q_p \leqslant X_{[s]}\right) \geqslant 1-\alpha$$

- Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{P}\left(X_{[r]} < q_p \leqslant X_{[s]}\right) = 1 - \left\{\mathrm{P}\left(X_{[r]} \geqslant q_p\right) + \mathrm{P}\left(X_{[s]} < q_p\right)\right\}$$

- Αρκεί το άθροισμα στις αγκύλες να είναι $\leqslant \alpha$:

$$\mathrm{P}\left(X_{[r]} \geqslant q_p\right) \leqslant \frac{\alpha}{2}$$
$$\mathrm{P}\left(X_{[s]} < q_p\right) \leqslant \frac{\alpha}{2}$$

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- $\left\{X_{[s]} < q_p\right\}$: τουλάχιστον s παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- $\left\{X_{[s]} < q_p\right\}$: τουλάχιστον s παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- $\left\{X_{[r]} \geqslant q_p\right\}$: το πολύ $r-1$ παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- $\left\{X_{[s]} < q_p\right\}$: τουλάχιστον s παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- $\left\{X_{[r]} \geqslant q_p\right\}$: το πολύ $r-1$ παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- Ορίζω $Y = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}\{X_i < q_p\}$

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- $\left\{X_{[s]} < q_p\right\}$: τουλάχιστον s παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- $\left\{X_{[r]} \geqslant q_p\right\}$: το πολύ $r-1$ παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- Ορίζω $Y = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}\{X_i < q_p\}$
- Για συνεχή F: $\mathrm{P}(X_1 < q_p) = \mathrm{P}(X_1 \leqslant q_p) = p$

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- $\{X_{[s]} < q_p\}$: τουλάχιστον s παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- $\{X_{[r]} \geqslant q_p\}$: το πολύ $r-1$ παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- Ορίζω $Y = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}\{X_i < q_p\}$
- Για συνεχή F: $\mathrm{P}(X_1 < q_p) = \mathrm{P}(X_1 \leqslant q_p) = p$
- Επειδή X_i ανεξάρτητες και ισόνομες: $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- $\left\{X_{[s]} < q_p\right\}$: τουλάχιστον s παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- $\left\{X_{[r]} \geqslant q_p\right\}$: το πολύ $r-1$ παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- Ορίζω $Y = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}\{X_i < q_p\}$
- Για συνεχή F: $\mathrm{P}(X_1 < q_p) = \mathrm{P}(X_1 \leqslant q_p) = p$
- Επειδή X_i ανεξάρτητες και ισόνομες: $Y \sim \mathcal{B}(n,p)$
- Οπότε

$$\mathrm{P}\left(X_{[s]} \leqslant q_p\right) = \mathrm{P}(Y \geqslant s) = \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

- $\left\{X_{[s]} < q_p\right\}$: τουλάχιστον s παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- $\left\{X_{[r]} \geqslant q_p\right\}$: το πολύ $r-1$ παρατηρήσεις είναι μικρότερες του q_p
- Ορίζω $Y = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{I}\{X_i < q_p\}$
- Για συνεχή F: $\mathrm{P}(X_1 < q_p) = \mathrm{P}(X_1 \leqslant q_p) = p$
- Επειδή X_i ανεξάρτητες και ισόνομες: $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$
- Οπότε

$$\mathrm{P}\left(X_{[s]} \leqslant q_p\right) = \mathrm{P}(Y \geqslant s) = \sum_{i=s}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

- Ομοίως:

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\left(X_{[r]} \geqslant q_p\right) &= 1 - \mathrm{P}\left(X_{[r]} < q_p\right) \\ &= 1 - \mathrm{P}(Y \geqslant r) = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \end{aligned}$$

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

Συνοψίζοντας, δείξαμε την

Πρόταση

Το τυχαίο διάστημα

$$\left(X_{[r]}, X_{[s]}\right]$$

όπου

- $r = \max\{k = 0, 1, \ldots, n : F_{n,p}(k-1) \leqslant \alpha/2\}$
- $s = \min\{k = 1, \ldots, n+1 : F_{n,p}(k-1) \geqslant 1 - \alpha/2\}$
- $F_{n,p}(\cdot)$ *είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της* $\mathcal{B}(n,p)$

είναι ένα $100(1-\alpha)\%$ *διάστημα εμπιστοσύνης για το* q_p, $p \in (0,1)$.

Σχόλια

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

Συνοψίζοντας, δείξαμε την

Πρόταση

Το τυχαίο διάστημα

$$\left(X_{[r]}, X_{[s]}\right]$$

όπου

- $r = \max\{k = 0, 1, \ldots, n : F_{n,p}(k-1) \leqslant \alpha/2\}$
- $s = \min\{k = 1, \ldots, n+1 : F_{n,p}(k-1) \geqslant 1 - \alpha/2\}$
- $F_{n,p}(\cdot)$ *είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της* $\mathcal{B}(n, p)$

είναι ένα $100(1-\alpha)\%$ *διάστημα εμπιστοσύνης για το* q_p, $p \in (0, 1)$.

Σχόλια

- Στην πρόταση πρέπει να ορίσουμε $X_{[0]} = -\infty$ και $X_{[n+1]} = \infty$.

Διωνυμικά Διαστήματα εμπιστοσύνης για ποσοστιαία σημεία

Συνοψίζοντας, δείξαμε την

Πρόταση

Το τυχαίο διάστημα

$$\left(X_{[r]}, X_{[s]}\right]$$

όπου

- $r = \max\{k = 0, 1, \ldots, n : F_{n,p}(k-1) \leqslant \alpha/2\}$
- $s = \min\{k = 1, \ldots, n+1 : F_{n,p}(k-1) \geqslant 1 - \alpha/2\}$
- $F_{n,p}(\cdot)$ *είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της* $\mathcal{B}(n, p)$

είναι ένα $100(1-\alpha)\%$ *διάστημα εμπιστοσύνης για το* q_p, $p \in (0, 1)$.

Σχόλια

- Στην πρόταση πρέπει να ορίσουμε $X_{[0]} = -\infty$ και $X_{[n+1]} = \infty$.
- Το προηγούμενο Δ.Ε είναι συντηρητικό.

Εφαρμογή

Έστω $(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14)$. Να υπολογιστεί το 95% Διωνυμικό διάστημα εμπιστοσύνης για τη διάμεσο.

Εφαρμογή

Έστω $(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14)$. Να υπολογιστεί το 95% Διωνυμικό διάστημα εμπιστοσύνης για τη διάμεσο.

- Διάμεσος: $q_{0.5}$ (και σημειακά: $\widehat{q}_{0.5} = -0.08$)

Εφαρμογή

Έστω $(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14)$. Να υπολογιστεί το 95% Διωνυμικό διάστημα εμπιστοσύνης για τη διάμεσο.

- Διάμεσος: $q_{0.5}$ (και σημειακά: $\widehat{q}_{0.5} = -0.08$)
- $F_{n,p} = F_{10,0.5}$: συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{B}(10, 0.5)$

Εφαρμογή

Έστω $(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14)$. Να υπολογιστεί το 95% Διωνυμικό διάστημα εμπιστοσύνης για τη διάμεσο.

- Διάμεσος: $q_{0.5}$ (και σημειακά: $\widehat{q}_{0.5} = -0.08$)
- $F_{n,p} = F_{10,0.5}$: συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{B}(10, 0.5)$
- Υπολογισμός r και s

k	$F_{10,0.5}(k-1)$	$x_{[k]}$
0	0.000	$-\infty$
1	0.001	-1.13
2	0.011	-0.90
3	0.055	-0.24
4	0.172	-0.14
5	0.377	-0.08
6	0.623	0.13
7	0.828	0.18
8	0.945	0.71
9	0.989	1.59
10	0.999	1.98
11	1.000	∞

$\alpha = 0.05$

$$r = \max\{k = 0, 1, \ldots, 10 : F_{10,0.5}(k-1) \leqslant 0.025\}$$
$$= 2 \Rightarrow$$
$$x_{[r]} = x_{[2]} = -0.90$$

$$s = \min\{k = 1, \ldots, 11 : F_{10,0.5}(k-1) \geqslant 0.975\}$$
$$= 9 \Rightarrow$$
$$x_{[s]} = x_{[9]} = 1.59$$

Εφαρμογή

Έστω $(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71, -0.24, 1.98, -0.14)$. Να υπολογιστεί το 95% Διωνυμικό διάστημα εμπιστοσύνης για τη διάμεσο.

- Διάμεσος: $q_{0.5}$ (και σημειακά: $\widehat{q}_{0.5} = -0.08$)
- $F_{n,p} = F_{10,0.5}$: συνάρτηση κατανομής της $\mathcal{B}(10, 0.5)$
- Υπολογισμός r και s

k	$F_{10,0.5}(k-1)$	$x_{[k]}$
0	0.000	$-\infty$
1	0.001	-1.13
2	0.011	-0.90
3	0.055	-0.24
4	0.172	-0.14
5	0.377	-0.08
6	0.623	0.13
7	0.828	0.18
8	0.945	0.71
9	0.989	1.59
10	0.999	1.98
11	1.000	∞

$\alpha = 0.05$

$r = \max\{k = 0, 1, \ldots, 10 : F_{10,0.5}(k-1) \leqslant 0.025\}$
$= 2 \Rightarrow$
$x_{[r]} = x_{[2]} = -0.90$

$s = \min\{k = 1, \ldots, 11 : F_{10,0.5}(k-1) \geqslant 0.975\}$
$= 9 \Rightarrow$
$x_{[s]} = x_{[9]} = 1.59$

- 95% Δ.Ε για τη διάμεσο: $\left(x_{[2]}, x_{[9]}\right] = (-0.90, 1.59]$

Εφαρμογή (εντολές R)

```
> x <- c(-0.90, 0.18, 1.59, -1.13, -0.08, 0.13, 0.71,
+         -0.24, 1.98, -0.14)
> n <- length(x)
> p <- 0.5
> cbind(0:(n+1), pbinom(q=(-1):n, size = n, prob = p)
+        c(-Inf, sort(x), Inf))
```

Κάποιοι προβληματισμοί

- Γνωρίζουμε ότι $\widehat{F}_n$ είναι «κοντά» στην F (για κάθε F).

Κάποιοι προβληματισμοί

- Γνωρίζουμε ότι $\widehat{F}_n$ είναι «κοντά» στην F (για κάθε F).
- Είναι αυτό επαρκές για να έχουμε $T(\widehat{F}_n)$ κοντά στην $T(F)$;

Κάποιοι προβληματισμοί

- Γνωρίζουμε ότι $\widehat{F}_n$ είναι «κοντά» στην F (για κάθε F).
- Είναι αυτό επαρκές για να έχουμε $T(\widehat{F}_n)$ κοντά στην $T(F)$;
- Όχι απαραίτητα

Κάποιοι προβληματισμοί

- Γνωρίζουμε ότι $\widehat{F}_n$ είναι «κοντά» στην F (για κάθε F).
- Είναι αυτό επαρκές για να έχουμε $T(\widehat{F}_n)$ κοντά στην $T(F)$;
- Όχι απαραίτητα
- Αντιπαράδειγμα:
    - έστω F παραγωγίσιμη με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$.
    - έστω $T(F) = F'(x)|_{x=x_0} = f(x_0)$
    - Η $\widehat{F}_n$ δεν είναι παραγωγίσιμη στα $x_0 = x_1, \ldots, x_n$, ενώ για $x_0 \neq x_1, \ldots, x_n$ έχουμε $\widehat{F}'_n(x_0) = 0$.

Κάποιοι προβληματισμοί

- Γνωρίζουμε ότι $\widehat{F}_n$ είναι «κοντά» στην F (για κάθε F).
- Είναι αυτό επαρκές για να έχουμε $T(\widehat{F}_n)$ κοντά στην $T(F)$;
- Όχι απαραίτητα
- Αντιπαράδειγμα:
  - έστω F παραγωγίσιμη με συνάρτηση πυκνότητας $f(x)$.
  - έστω $T(F) = F'(x)|_{x=x_0} = f(x_0)$
  - Η $\widehat{F}_n$ δεν είναι παραγωγίσιμη στα $x_0 = x_1, \ldots, x_n$, ενώ για $x_0 \neq x_1, \ldots, x_n$ έχουμε $\widehat{F}'_n(x_0) = 0$.
- Η συνέπεια και η ασυμπτωτική κανονικότητα εκτιμητών συναρτησιακών της F απαιτούν επί πλέον ιδιότητες για την $T(F)$ όπως η συνέχεια και η διαφορισιμότητα συναρτησιακών.