## 3. Μήκος, εσωτερικό γινόμενο και ορθογωνιότητα στον Rn

### Εσωτερικό γινόμενο

Έστω  και .

Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των **** και  ως:

 !

<https://www.geogebra.org/m/N9pvSPf4>

#### Κανόνες πράξεων

* 
* 
*  για 

Αποδείξεις…

Συνέπεια:



Δηλ., κάνω πράξεις όπως με γινόμενα παρενθέσεων.

### Μέτρο

Στον  έχω ότι το μέτρο ενός διανύσματος  δίνεται από .

Αυτό όμως ισούται με . Αυτό χρησιμοποιώ ως ορισμό του μέτρου και στον .

Αν  τότε το μέτρο του  δίνεται από

.

#### Ιδιότητες

* 
* 
*  

### Ορθογωνιότητα









Στον  έχουμε 





Από το πυθαγόρειο γνωρίζουμε ότι αν  τότε  και επομένως πρέπει . Αυτό χρησιμοποιούμε και ως ορισμό της ορθογωνιότητας στον .

**Ορισμός:** Για  λέμε ότι  &  ορθογώνια και γράφουμε  όταν .

**Προσοχή:**  όταν έχουν μεταξύ τους γωνία 90 μοίρες όταν τα φέρω σε κοινό σημείο εκκίνησης.

Π.χ. είναι ορθογώνια στο **y** τα **x** της κόκκινης ευθείας? Της πράσινης?

### Εφαρμογή: προβολή σε ευθεία

* Έστω η ευθεία  και ένα σημείο . Θέλω να υπολογίσω την προβολή του  στην , την .
* Κατ’ αρχάς: αφού 

Επίσης: 









a







Άρα 

* Παρατηρείστε ότι:

 

<https://www.geogebra.org/m/TZvtkHKz>

<https://www.geogebra.org/m/mkV7F8Jf>

### Εφαρμογή: Η ανισότητα Cauchy-Schwartz

Έστω  και η προβολή του  στην .

Έχουμε:  και άρα





0





 

με ισότητα αν  συγγραμικά.

### Γωνία δύο διανυσμάτων στον Rn

Έστω  και η προβολή του  στην .

* Ορίζουμε ως γωνία  των διανυσμάτων  εκείνο τον αριθμό  για τον οποίο:



* Η ανισότητα Cauchy-Schwartz εγγυάται ότι αυτή η τιμή 

### Τριγωνική ανισότητα:

Για  έχουμε:









**x**





Cauchy-Schwartz





 

### Εφαρμογή: οι λύσεις μιας εξίσωσης σε πολλούς αγνώστους

* Ενδιαφέρομαι για εξισώσεις της μορφής  , όπου  γνωστές σταθερές και  άγνωστοι: Ποιό είναι το σύνολο των  που ικανοποιεί αυτή την εξίσωση?
* Π.χ. ?
* Τέτοιες εξισώσεις γράφονται και ως  με 

#### Πρώτα στον με b=0:

* , δηλ.  ή και 

π.χ. , δηλ. .

* *Γεωμετρική λύση*: Όλα τα  που ανήκουν στην ευθεία που περνά από το 0 και είναι κάθετη στο .



* *Αλγεβρική λύση*: Όλα τα  που ικανοποιούν την  . Άρα οι λύσεις θα είναι όλα τα  της μορφής  για οποιοδήποτε (δηλαδή για όλα τα) .

Άρα το σύνολο των λύσεων είναι η ευθεία  που διέρχεται από το 0.

#### Στον με :

* *Αλγεβρική λύση*: Όλα τα  που ικανοποιούν την  . Άρα οι λύσεις θα είναι όλα τα  της μορφής

 για οποιοδήποτε (δηλαδή για όλα τα) .

Άρα το σύνολο των λύσεων είναι η ευθεία  που δε διέρχεται από το 0 διότι έχει μετατοπιστεί κατά .



#### Στον με b=0:

* , δηλ.  ή και 

π.χ. , δηλ. .

* *Γεωμετρική λύση*: Όλα τα  που ανήκουν στο επίπεδο που περνά από το 0 και είναι κάθετη στο .

<https://www.geogebra.org/m/myVDsRRt>

* *Αλγεβρική λύση*: Όλα τα  που ικανοποιούν την  . Άρα οι λύσεις θα είναι όλα τα  της μορφής  για οποιοδήποτε (δηλαδή για όλα τα) .

Άρα το σύνολο των λύσεων είναι το επίπεδο  που διέρχεται από το 0.

#### Στον με :

* *Αλγεβρική λύση*: Όλα τα  που ικανοποιούν την  .

Άρα οι λύσεις θα είναι όλα τα  της μορφής



για οποιοδήποτε (δηλαδή για όλα τα) .

Άρα το σύνολο των λύσεων είναι το επίπεδο



που δε διέρχεται από το 0 διότι έχει μετατοπιστεί κατά .

<https://www.geogebra.org/m/myVDsRRt>