## 9. Η λύση m εξισώσεων με n αγνώστους



(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 2.2)

* Ψάχνουμε **το σύνολο των λύσεων** ενός συστήματος  όπου , , .
* Όπως και στην  περίπτωση: οι λύσεις δεν αλλάζουν αν κάνω γραμμομετασχηματισμούς στον  και στο  ταυτόχρονα.
* **Εφαρμόζοντας αλγόριθμο Gauss** φθάνουμε τώρα όχι σε άνω τριγωνικό , αλλά σε «**κλιμακωτό**» , όπου η μη-θεραπεύσιμη περίπτωση (συναντάω 0 από τα οποία δεν μπορώ να απαλλαγώ) είναι ο κανόνας.

#### Παράδειγμα:











Οι **οδηγοί**

* δεν είναι πια πάνω στη διαγώνιο, αλλά
* **είναι το πλησιέστερο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε γραμμής**,
* ο οδηγός, αλλά και τα μηδενικά που προηγούνται να έχουν **από κάτω τους στήλη μηδενικών**.



Κατά τα άλλα λειτουργώ όπως στην  περίπτωση: σε κάθε βήμα προσθέτω πολλαπλάσια της γραμμής του οδηγού στις από κάτω της, ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία κάτω από τον οδηγό.



Έτσι φθάνω σε **κλιμακωτό πίνακα** του οποίου η γενική μορφή έχει ως εξής:



?

?

?

Με γενικά χαρακτηριστικά:

* Πρώτες έρχονται οι μη-μηδενικές γραμμές και τελευταίες οι γραμμές που είναι γεμάτες μηδέν.
* Πρώτο μη-μηδενικό στοιχείο κάθε μη-μηδενικής γραμμής ονομάζεται **οδηγός**.
* Κάτω από κάθε οδηγό έχει **στήλη μηδενικών**.
* Κάθε οδηγός στα δεξιά του οδηγού προηγούμενων γραμμών.

Όπως στη περίπτωση μπορεί να δείξει λοιπόν κανείς ότι:

Αν   τότε θα υπάρχουν  κάτω τριγωνικός  με “1” στη διαγώνιο και  πίνακας μεταθέσεων , καθώς και  κλιμακωτός  τέτοιοι ώστε .

Προσοχή στις διαστάσεις:

*  έχει τις ίδιες με τον ,
* ενώ ο  και ο  είναι και οι δύο τετραγωνικοί με διαστάσεις τέτοιες που να μπορώ να πολ/σω τους  και  από αριστερά: γραμμές του  επί γραμμές του 



Προσοχή στη κατασκευήτου :

*  περιέχει πάλι τα αντίθετα των συντελεστών,
* **αλλά όχι στη θέση του στοιχείου που μηδενίζανε**!
  + Τώρα είναι μεν **στη «σωστή» γραμμή ο καθένας**,
  + αλλά **στην κ-στήλη (κάτω από τον κ-«1») μπαίνουν οι συντελεστές που χρησιμοποιήθηκαν με τον κ-οδηγό** (ακόμα και αν αυτός δεν ήταν στη κ-στήλη),

#### Στο παράδειγμά μας :

Δίνεται ο ακόλουθος πίνακας Α:

,

* 1. **(0.5 μον.)** Να βρεθεί η παραγοντοποίηση PA=LU, όπου P πίνακας μεταθέσεων, L κάτω τριγωνικός (με 1 στη διαγώνιο) και U κλιμακωτός.
  2. Έστω  Περιγράψτε το σύνολο των λύσεων του συστήματος  ως  για κατάλληλα **ανεξάρτητα** . (πρώτα εφαρμόζετε τον αλγόριθμο του Gauss και ακολούθως λύστε τις εξισώσεις ώστε να εκφράσετε τις βασικές μεταβλητές συναρτήσει των ελεύθερων. Αν ο αλγόριθμος Gauss υποδείξει ότι το σύστημα είναι αδύνατο, **πρώτα επισημάνετε το**. Ακολούθως, αγνοείστε τους περιορισμούς που το καθιστούν αδύνατο και προχωρήστε στην επίλυσή του.)

#### Λύσεις του Ax=0

(δηλ. . Το σύστημα λέγεται τότε «ομογενές».)

Κατ’ αρχάς , όπου  ο κλιμακωτός στον οποίο φθάνουμε με αλγόριθμο Gauss.

 

* **Κάθε μεταβλητή αντιστοιχεί σε μία στήλη** του . Οι μεταβλητές που αντιστοιχούν σε **στήλη που δεν έχει οδηγό ονομάζονται ελεύθερες, οι άλλες βασικές**. Εδώ: βασικές: , ελεύθερες: .
* Κάθε μη-μηδενική γραμμή του  αντιστοιχεί σε μία εξίσωση. Λύσε τις έτσι ώστε σε όλες **να εκφράζονται οι βασικές μεταβλητές συναρτήσει των ελεύθερων.** (Δηλ.: αριστερά του “=” μόνο βασικές, δεξιά του “=” μόνο ελεύθερες).

Εδώ: 



* Λύσεις: τα  της μορφής: **οι ελεύθερες ως έχουν, οι βασικές συναρτήσει των ελεύθερων**.

Εδώ: Όλα τα  που γράφονται ως



Θέσεις ελεύθερων

Άρα λύσεις της .

Γενικώς:

* Φτιάχνω **τόσα διανύσματα**  **όσες έχω ελεύθερες μεταβλητές**.
* Σε καθένα από αυτά έχω «θέσεις» ελεύθερων και βασικών μεταβλητών. **Τις «θέσεις» των ελεύθερων τις γεμίζω με 0/1** έτσι ώστε σε κάθε  να έχω ένα “1” και κάθε «θέση» ελεύθερης να έχει κάπου ένα «1».
* Για κάθε  έχω δώσει τιμές στις ελεύθερες. Με αυτές τις τιμές **μπαίνω στις εξισώσεις και βρίσκω τις τιμές των βασικών**.
* Τέλος: λύσεις της .

π.χ. 1 εξίσωση: 



βασική: , ελεύθερες: 

λύσεις της 



Θέσεις ελεύθερων



#### Ax=b

Με τους ίδιους γραμμομετασχηματισμούς στο  όπως στο , το  μεταβάλλεται σε κάποιο .



Στην περίπτωσή μας: 



Κατ’ αρχάς: Για να υπάρχουν λύσεις πρέπει το  να είναι τέτοιο ώστε για το  που προκύπτει **οι συντεταγμένες που αντιστοιχούν στις μηδενικές γραμμές του**  **να είναι ίσες με 0**.

Εδώ: 

Δηλαδή: το σύνολο των εφικτών b (, που εξ ορισμού είναι το span των στηλών,) δεν είναι όλος ο , αλλά μόνο εκείνα τα b που ικανοποιούν τον παραπάνω περιορισμό. Αυτός μας λέει ότι πρόκειται για τα b που είναι κάθετα στο . Πρόκειται λοιπόν για ένα επίπεδο στον  που περνά από το 0. Αυτό το ξέραμε και λόγω του ότι δυο από τις στήλες του Α είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Άρα των span των στηλών στην ουσία είναι span δύο στηλών, άρα επίπεδο.

Γενικώς: Αν  οδηγοί  μηδενικές γραμμές. Άρα χρειάζομαι



Αν αυτοί οι περιορισμοί πληρούνται έχω λύσεις. Ποιες είναι αυτές;

π.χ. 



* Πάλι λύνω τις εξισώσεις που αντιστοιχούν στις μη-μηδενικές γραμμές του  ώστε να εκφράσω τις βασικές συναρτήσει των ελεύθερων.





* Άρα λύσεις τα  της μορφής







+λύσεις της 



Άρα: οι λύσεις της  + λύσεις της 

Σημείωση: Το ρόλο της  εδώ τον έπαιξε η λύση για την οποία ελεύθερες μεταβλητές = 0. Ωστόσο **οποιαδήποτε άλλη λύση** της  μπορεί να παίξει το ρόλο της .

Σημείωση: Οι λύσεις της  είναι **ο κατά**  **«μετατοπισμένος» μηδενόχωρος του** .

 Οι λύσεις της  δεν είναι υπόχωρος.

### Συμπεράσματα:

Έστω  **αριθμός οδηγών = τάξη του πίνακα**

 **ελεύθερες μεταβλητές** και  **μηδενικές γραμμές του** .

Αν 

0  δεν υπάρχουν μηδενικές γραμμές του .

Άρα: δεν υπάρχουν περιορισμοί στην ύπαρξη λύσης.

 Έχω λύση για κάθε .



Αν κάποιο  με  είναι   δεν έχω λύση.

Αν   υπάρχουν λύσεις.



**Αν υπάρχουν λύσεις:**



=0  δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές.

 μία ακριβώς λύση

λύσεις του  



λύσεις του  



και 

Έστω  **αριθμός οδηγών = τάξη του πίνακα**

 **ελεύθερες μεταβλητές** και  **μηδενικές γραμμές του** .

Αν 

0  δεν υπάρχουν μηδενικές γραμμές του .

Άρα: δεν υπάρχουν περιορισμοί στην ύπαρξη λύσης.

 Έχω λύση για κάθε .



Αν κάποιο  με  είναι   δεν έχω λύση.

Αν   υπάρχουν λύσεις.

**Αν υπάρχουν λύσεις:**

=0  δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές.

 μία ακριβώς λύση

λύσεις του  



λύσεις του  



και 

Άσκηση: 



, 

Βασικές:, Ελεύθερες:

,





Λύσεις τα  της μορφής



Λύσεις =+, όπου:



Άσκηση: 







Βασικές:, Ελεύθερες:

* 
* 



* 

.

* 





Λύσεις τα  της μορφής



Λύσεις =+, όπου:

.