## 7. Αντίστροφοι και Ανάστροφοι Πίνακες



(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 1.6)

### Αντίστοφοι πίνακες

* Έστω ο στοιχειώδης  πίνακας 



* Γνωρίζουμε ότι  προσθέτει την *λ*-πλάσια της *j*-συντεταγμένης στην *i*-συντεταγμένη του : .



* Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε το αποτέλεσμα με  ξανα-ακυρώνουμε τον μετασχηματισμό που διενήργησε η  και γυρνάμε στο αρχικό . Δηλαδή







Αυτή είναι και η ιδιότητα μέσω της οποίας θα ορίσουμε τον αντίστροφο, , ενός πίνακα . Εάν υπάρχει αντίστροφος αυτός θα έχει την ιδιότητα ότι

 και επομένως .



Σημείωση: **Αντίστροφος δεν υπάρχει για κάθε πίνακα** **:** Έστω ένας πίνακας  ιδιόμορφος. Τότε θα υπάρχει  με . Εδώ όμως δεν υπάρχει πίνακας που πολλαπλασιάζει το  και ξαναγυρνάμε στο  διότι: 

**Ορισμός (αντίστροφος πίνακας):** Ένας  πίνακας  λέγεται **αντιστρέψιμος** εάν υπάρχει πίνακας  τέτοιος που

 ( δεξιός αντίστροφος) και

 ( αριστερός αντίστροφος).

**Εάν υπάρχει** **είναι** **μοναδικός** και συμβολίζεται με .

Παραδείγματα:

* 



* 
* 



Σημείωση:

1) Από τον ορισμό προκύπτει ότι 

2) Αν ο  έχει δεξιό αντίστροφο  και αριστερό  τότε πρέπει να ταυτίζονται και ο  είναι αντιστρέψιμος!

Διότι:



**Κανόνας:** Αν ,  αντιστρέψιμοι (**υποθέτω ότι υπάρχουν** , ) τότε και  αντιστρέψιμος και

.

!

**Απόδειξη:**  και 



 παρομοίως

















**ΟΚ**



Προσοχή: Μπορεί να υπάρχουν μη-τετραγωνικοί πίνακες ,  (, οι οποίοι δεν έχουν αντίστροφο), τέτοιοι που o  πίνακας  να έχει αντίστροφο. Τότε προφανώς ο παραπάνω τύπος δεν ισχύει.

Π.χ.  και . Τότε  που είναι αντιστρέψιμος

Ή π.χ.  και . Τότε  που είναι αντιστρέψιμος.

Γενικότερα:  αν , ,  αντιστρέψιμοι.

### Μέθοδος υπολογισμού του αντιστρόφου (Αλγόριθμος Gauss Jordan)

Έστω  έχει  οδηγούς. Θα δείξουμε πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τον  σε αυτή την περίπτωση.

Ας συμβολίσουμε την *i*-στήλη του  με  (άγνωστη) δηλαδή:

,  (διάνυσμα, όχι αριθμός!)

Πιο αναλυτικά: 

Ας συμβολίσουμε επιπλέον με . Δηλαδή .

Πιο αναλυτικά:



* Η εξίσωση που ορίζει τον  είναι η 

Δηλαδή:



  



  





* **Ισοδύναμα** 

Άρα: έχω  γραμμικά συστήματα. Από το πρώτο μπορώ να βρω το , από το δεύτερο το , κλπ.

Πώς:

* πρώτα για το : θα έφτειαχνα τον  και θα έκανα αλγόριθμο Gauss μέχρι να φτάσω σε

.

Τότε το  ισοδυναμεί με 

(όπου  η *1*-στήλη του )

* μετά για το : θα έφτειαχνα τον  και θα έκανα αλγόριθμο Gauss μέχρι να φτάσω σε

.

Τότε το  ισοδυναμεί με 

(όπου  η *2*-στήλη του )

…

**Αντί να κάνω Gauss για κάθε σύστημα ξεχωριστά, κολλάω όλες τις δεξιές πλευρές δεξιά από τον  και κάνω Gauss σε όλες μαζί:**

 

Τότε το  ισοδυναμεί με 

π.χ. Βρες τον αντίστροφο του 



 







 ισοδυναμεί με 

* Εδώ θα μπορούσα να πάρω τα συστήματα  (όπου  η *i*-στήλη του ) και να λύσω το καθένα από αυτά με ανάδρομη αντικατάσταση.

Π.χ. για να βρώ το  (τη πρώτη στήλη του ) θα έλυνα με ανάδρομη αντικατάσταση το , δηλαδή το



Ωστόσο, τώρα που έχω πολλές δεξιές πλευρές για τον ίδιο  συμφέρει να κάνω κάτι άλλο:

**Να συνεχίσω τους γραμμομετασχηματισμούς μέχρι αριστερά να εμφανιστεί ο ταυτοτικός (πώς; βλέπε παρακάτω) \***



Τότε το  ισοδυναμεί με  που ισοδυναμεί με 

και **επομένως η *i*-στήλη του  είναι η *i*-στήλη του  δηλαδή .** Τελείωσα!

Πώς \* : **με ανάποδη απαλοιφή Gauss**.

**Βήμα 1ο**: Προσθέτω πολλαπλάσια της τελευταίας γραμμής στις προηγούμενες έτσι ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία πάνω από τον τελευταίο οδηγό.

**Βήμα 2ο**: Προσθέτω πολλαπλάσια της προτελευταίας γραμμής στις προηγούμενες έτσι ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία πάνω από τον προτελευταίο οδηγό.

****

**Μέχρι να φθάσω αριστερά σε διαγώνιο πίνακα**.

**Τέλος:** Διαιρώ κάθε γραμμή με στοιχείο της διαγωνίου του αριστερού πίνακα, οπότε αριστερά παίρνω τον ταυτοτικό.



 

Σημείωση: Δείξαμε ότι αν  μη – ιδιόμορφος  υπάρχει δεξιός αντίστροφος.

Όμως η κατασκευή εξασφαλίζει ότι θα υπάρχει και αριστερός και άρα ο  είναι αντιστρέψιμος και ο  αυτός που φτιάξαμε.

Μπορεί κανείς να δείξει και το ανάποδο:

Αν  αντιστρέψιμος  μη – ιδιόμορφος

και άρα:

**Αντιστρέψιμοι πίνακες είναι ακριβώς οι μη – ιδιόμορφοι.**

**Άσκηση για το σπιτι.** Να βρεθεί ο αντίστροφος του 

**Άσκηση.** Να βρεθεί ο αντίστροφος του .











Άρα 

**Άσκηση.** Αν   αντιστρέψιμος και , να δειχτεί ότι:

.



Απόδ. Θα δείξουμε πρώτα: .



Θέτοντας , η αριστερή πλευρά ισούται με











,



καθώς



.



Η  αποδεικνύεται παρομοίως.



**Πρόταση.** Έστω  , όπου  και  αντιστρέψιμοι. Τότε ο  θα είναι αντιστρέψιμος αν  είναι αντιστρέψιμος και , με

.

**Απόδ**.

 



 Πάνω αριστερά: 

 Κάτω αριστερά: 

 Πάνω δεξιά: =



 Κάτω δεξιά: 

 παρομοίως.

### Ανάστροφοι πίνακες

Αν  ένας  πίνακας, τότε ως  ορίζεται ο  πίνακας που προκύπτει **αν στον  εναλλάξω γραμμές και στήλες**:

Η πρώτη γραμμή του  γίνεται πρώτη στήλη του  κλπ.

Δηλαδή 

π.χ. 

Επίσης: Ο **προκύπτει αν στον**  **καθρεφτίσω τα στοιχεία στην κύρια διαγώνιο** (,,)



Ισχύουν οι εξής **κανόνες**:

*  (προφανές)
*  (εύκολο...)
*  (θέλει λίγη δουλίτσα, αλλά μόνο ορισμοί...)
* 

**Απόδειξη** του τελευταίου:

Έχουμε 

παίρνουμε ανάστροφα 

κανόνας  

Αυτός είναι ορισμός του αντιστρόφου του : ένας πίνακας  με .

Άρα ο  είναι ο  δηλαδή ο .

**Ορισμός:** Ένας  πίνακας  λέγεται συμμετρικός.



δηλ. τα συμμετρικά ως προς την κύρια διαγώνιο στοιχεία ταυτίζονται.

**Πρόταση:** Αν  συμμετρικός και αντιστρέψιμος τότε  συμμετρικός.

!

**Απόδειξη:** Δείξτε 

Αλλά έχουμε  και αφού  συμμετρικός (άρα ) το τελευταίο είναι ίσο με . OK

#### Διάσπαση Cholesky

Αν  συμμετρικός υπάρχουν κάτω τριγωνικός  με 1 στη διαγώνιο και διαγώνιος  τέτοιοι ώστε .

**Απόδειξη.** Έχουμε  και επομένως  και αφού  και . Αλλά αφου η διάσπαση  είναι μοναδική, έπεται  και άρα .

**Προσοχή**: Αν ,  συμμετρικοί μπορεί ο  να μην είναι συμμετρικός, καθώς  και όχι .

π.χ.  συμμετρικός

 όχι συμμετρικός

συμμετρικός