## 6. Γραμμικά Συστήματα: Ο Αλγόριθμος Gauss και η παραγοντοποίηση PA=LDU



(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 1.3 και 1.5)



Έστω το ακόλουθο γραμμικό σύστημα:



Στόχος: Να βρω τις λύσεις, δηλαδή τα  που ικανοποιούν και τις τρεις εξισώσεις.

Η διαδικασία επίλυσης **βασίζεται στην αρχή ότ**ι:

Οι **λύσεις του συστήματος δεν αλλάζουν** αν

- αλλάξω τη σειρά των εξισώσεων

- πολλαπλασιάσω μία εξίσωση με 





Π.χ. 

- προσθέσω σε μία εξίσωση πολλαπλάσιο μίας άλλης εξίσωσης

  

Δηλ.: αν  ικανοποιεί τις δύο εξισώσεις αριστερά θα ικανοποιεί και τις δύο δεξιά και αντίστροφα.

Π.χ.





Ο αλγόριθμος Gauss προτείνει ένα συγκεκριμένο τρόπο να κάνω τέτοιες «γραμμοπράξεις» ώστε να καταλήξω σε λύση.

Κατ’ αρχάς το σύστημα γράφεται ως

 με

 και .

### Αλγόριθμος Gauss

Πρώτα παίρνουμε τον  και κολλάμε από δεξιά το .

. Στο παράδειγμά μας σχηματίζεται ο .

Ακολούθως **κάνουμε γραμμοπράξεις στον «διευρυμένο»  με την εξής σειρά**:

**1ο βήμα:**

Αν  το ονομάζουμε **πρώτο οδηγό**. Προσθέτουμε κατάλληλα **πολλαπλάσια της πρώτης γραμμής** (την οποία κρατάμε αναλλοίωτη) στις επόμενες, έτσι ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία κάτω από τον πρώτο οδηγό.



Δηλαδή: στην  γραμμή προσθέτω της πρώτης γραμμής.



 







**2ο βήμα:**

Αν το δεύτερο στοιχείο της διαγωνίου (που προέκυψε μετά το 1ο βήμα)  το ονομάζω **δεύτερο οδηγό**. Κρατάω τις δύο πρώτες γραμμές και προσθέτω κατάλληλα **πολλαπλάσια της** δεύτερης γραμμής (της **γραμμής του οδηγού**!!) στις επόμενες ώστε να μηδενιστούν τα στοιχεία κάτω από το δεύτερο οδηγό.



 





Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται (υπό την προϋπόθεση ότι τα διαγώνια στοιχεία που συναντώ είναι ) **μέχρι να φθάσω δεξιά σε άνω τριγωνικό πίνακα** (τα στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο είναι ) και πάνω στη διαγώνιο έχει τους οδηγούς. Αυτόν τον ονομάζω .

Στο παράδειγμά μας, όπου ο  είναι  άρκεσαν δύο βήματα. Αν  χρειάζονται  βήματα του Αλγορίθμου Gauss.



Παράλληλα το  έχει μετασχηματιστεί σε κάποιο :

.

Οι λύσεις του  είναι ακριβώς οι λύσεις του . Το πλεονέκτημα είναι τώρα ότι μετατρέποντας το σύστημα σε τριγωνικό, μπορούμε να το λύσουμε εύκολα με «**ανάδρομη αντικατάσταση**»:

: 





Αντικαθιστώντας την τελευταία στην προτελευταία παίρνουμε:



και αντικαθιστώντας αυτά στην πρώτη:



**Συμπέρασμα**: Αν για κάποιο  πίνακα  κατά την εφαρμογή του Αλγορίθμου Gauss δε συναντήσω μηδενικό και βρω, λοιπόν, **ένα πλήρες σύστημα οδηγών (δηλ.  οδηγούς ),** τότε **το σύστημα  θα έχει ακριβώς μία λύση για οποιοδήποτε *b*.** **Ονομάζω αυτή την περίπτωση μη – ιδιόμορφη.**

#### Η διάσπαση A=L.U

Στο 1ο βήμα του Gauss μετατρέψαμε με γραμμοπράξεις τον  σε .

 







Οι γραμμοπράξεις αυτές μπορούν να εκφραστούν με πολλαπλασιασμούς του  με στοιχειώδεις πίνακες από αριστερά:







 



Στο 2ο βήμα πήραμε από τον  τον **** πάλι με γραμμοπράξεις**:**

 





Οι γραμμοπράξεις αυτές μπορούν να εκφραστούν με πολλαπλασιασμούς του  με στοιχειώδεις πίνακες από αριστερά









**Συνολικά λοιπόν** παίρνουμε:



= 



=



Στο γινόμενο  **οι συντελεστές «χάνονται» γενικώς.** (Εδώ είναι σύμπτωση ότι κάποιοι διατηρήθηκαν).



Για να **ακυρώσω ένα μετασχηματισμό**  αρκεί να τον «ξανακάνω» με αντίθετο πρόσημο του *λ:* .



Αν **ακυρώσω τον τελευταίο** μετασχηματισμό που έκανα από







παίρνω







και **αν ακυρώσω έναν – έναν και τους υπόλοιπους**











Οι στοιχειώδεις πίνακες εμφανίζονται με **ανάποδη σειρά** και περιέχουν τα **αντίθετα των συντελεστών** του αλγορίθμου Gauss.

Αν σχηματίσω τώρα το γινόμενο  θα δω ότι:

**τα αντίθετα των συντελεστών διατηρούνται στον L και βρίσκονται στην ίδια θέση με το στοιχείο που «μηδένισαν» στον  (για να προκύψει ο ).**



Αυτό δεν είναι σύμπτωση: αποδεικνύεται ότι ισχύει γενικά. Επομένως:

Αν για κάποιο  πίνακα  κατά τον Αλγόριθμο Gauss **δε συναντήσω μηδενικά**, αν έχω δηλαδή πλήρες σύστημα οδηγών, τότε θα υπάρχουν

- **κάτω τριγωνικός πίνακας **  με «1» στη διαγώνιο και τα αντίθετα των συντελεστών κάτω από τη διαγώνιο και

- **άνω τριγωνικός **  με τους οδηγούς στη διαγώνιο,

τέτοιοι ώστε

.

#### Κατασκευή του L:

Τον φτιάχνω παράλληλα με τον αλγόριθμο Gauss θέτοντας το αντίθετο του συντελεστή που χρησιμοποιώ για να μηδενίσω ένα στοιχείο του  στην αντίστοιχη θέση του ****.

Παράδειγμα:

 

 

**Άσκηση.** Να βρεθεί η παραγοντοποίηση  για το πίνακα





#### Επίλυση του Ax=b όταν γνωρίζω τη διάσπαση Α=LU

Αν αφού έχω κάνει τη διάσπαση  μου δοθεί η δεξιά πλευρά  του συστήματος, δεν αξίζει να «ξανακάνω» αλγόριθμο Gauss.

Λύνω το σύστημα  στα εξής δύο βήματα:



 

1) Βρες **** 

2) Βρες  

Και τα δύο συστήματα είναι τριγωνικά και λύνονται εύκολα.

π.χ. Να λυθεί το .

Υπενθύμ.  , με  και 

1) Βρες  

2) Βρες  

1) Βρες  







2) Βρες  







**Άσκηση για το σπίτι (για αύριο).** Να βρεθεί η παραγοντοποίηση  για το πίνακα



 και να λυθεί το σύστημα με , λύνοντας τα δύο τριγωνικά  και .

#### Παρατήρηση: o γράφεται ως με διαγώνιο με τους οδηγούς στη διαγώνιο και άνω τριγωνικός με 1 στη διαγώνιο.

Αν  θέτουμε

 και δηλ διαιρούμε κάθε γραμμή του  με το διαγώνιο στοιχείο του.

#### Παρατήρηση: Η παραγοντοποίηση είναι μοναδική

Δηλαδή αν υπήρχαν δύο τέτοιες διασπάσεις  και  με  κάτω τριγωνικούς με «1» στη διαγώνιο,  διαγώνιους και  πάνω τριγωνικούς με «1» στη διαγώνιο, τότε αυτές θα πρέπει να είναι ταυτόσημες:

,και 

#### Αν εμφανιστεί μηδενικό

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις, η **«θεραπεύσιμη»** και η **«μη – θεραπεύσιμη»**.

**Θεραπεύσιμη** π.χ. 

Μπορώ με εναλλαγή γραμμών να φέρω στην θέση που μ’ ενδιαφέρει μη μηδενικό στοιχείο και να το κάνω οδηγό.

Αν μπορώ **με εναλλαγή γραμμών** να έχω ένα πλήρες σύστημα οδηγών ( οδηγούς ) βρίσκομαι στην μη – ιδιόμορφη περίπτωση: **υπάρχει ακριβώς μία λύση για οποιαδήποτε δεξιά πλευρά**.

Σημείωση: Αν γνώριζα από πριν τις αναγκαίες εναλλαγές γραμμών θα μπορούσα να τις είχα κάνει εξ’ αρχής και να κάνω μετά τον αλγόριθμο Gauss χωρίς να συναντήσω . ** Υπάρχει πίνακας μεταθέσεων  τέτοιος που **.

**Μη – θεραπεύσιμη** Όταν όλη η στήλη δεξιά κάτω από τον προηγούμενο οδηγό είναι γεμάτη . Άρα δεν μπορώ με εναλλαγή γραμμών να φέρω μη – μηδενικό στοιχείο στη θέση του οδηγού.

π.χ. 

Τότε βρίσκομαι στην **ιδιόμορφη** περίπτωση: **Καμμία αναδιάταξη γραμμών δεν παράγει πλήρες σύστημα οδηγών**.

Στην ιδιόμορφη περίπτωση το αν θα υπάρχουν λύσεις και πόσες εξαρτάται από τη δεξιά πλευρά.

* Αν η μετασχηματισμένη δεξιά πλευρά στο παραπάνω παράδειγμα ήταν  οι δύο τελευταίες εξισώσεις θα ήταν συμβατές () αλλά θα είχα άπειρες λύσεις γιατί το  είναι ελεύθερο.
* Αν η δεξιά πλευρά ήταν  οι δύο τελευταίες εξισώσεις θα ήταν μη συμβατές και δεν θα είχα καμμία λύση.

**Στην ιδιόμορφη περίπτωση έχω καμμία ή άπειρες λύσεις.**

### Επιπτώσεις εναλλαγής γραμμών στη κατασκευή του L

  

Αρχ. 

1ο β.   

2ο β.   

3ο β.   

4ο β.   

  

5 ο β.   

Όταν εναλλάσω γραμμές στον 

* εναλλάσω τις ίδιες γραμμές στον 
* εναλλάσω στον  τις αντίστοιχες γραμμές **μόνο στους συντελεστές πού έχω συμπληρώσει εγώ** (όχι τα 1)

**Άσκηση για αύριο για το σπίτι.** Να βρεθεί η παραγοντοποίηση  για το πίνακα



