## 4. Γεωμετρική ερμηνεία συστημάτων γραμμικών εξισώσεων στον R3

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 1.2)

### Υπενθύμιση: μια εξίσωση στον R3

* εξισώσεις της μορφής  , όπου  γνωστές σταθερές και  άγνωστοι. Π.χ. ?



* Τέτοιες εξισώσεις γράφονται και ως  με 



* Μια τέτοια εξίσωση ικανοποιείται από πολλά . Το σύνολο των  που ικανοποιούν την εξίσωση σχηματίζουν ένα επίπεδο: Κάθε σημείο  του επιπέδου είναι λύση της εξίσωσης.
* Το επίπεδο αυτό είναι κάθετο στο . Αν  το επίπεδο δεν περνά από το 0, αλλά είναι μετατοπισμένο με μετατόπιση που αυξάνεται όσο αυξάνεται το . Οι λύσεις είναι οι

<https://www.geogebra.org/m/myVDsRRt>



* Στο παράδειγμά μας



### Συστήματα γραμμικών εξισώσεων στον R3

* Όταν έχω πολλές τέτοιες εξισώσεις (π.χ. τρεις εξισώσεις) και ψάχνω τα  που λύνουν ταυτόχρονα όλες τις εξισώσεις.
* Π.χ. 



* Η γενική μορφή ενός τέτοιου συστήματος είναι λοιπόν η



,



Όπου συμβολίζουμε τους συντελεστές  με διπλό δείκτη που ο πρώτος δίνει τη γραμμή (αριθμό εξίσωσης) και ο δεύτερος τη στήλη (αριθμό αγνώστου).



Στο παράδειγμα…

### Άλλη γραφή των συστημάτων γραμμικών εξισώσεων:

* Πριν γράψαμε την εξίσωση  και ως  με , όπου  το διάνυσμα των συντελεστών.
* Τώρα έχουμε τρία διανύσματα συντελεστών ένα για κάθε εξίσωση. Για να τα διακρίνουμε τα συμβολίζουμε με .



**Παρένθεση**: Αν θέλουμε να γράψουμε ένα διάνυσμα ως γραμμή αντί για στήλη (να το ξαπλώσουμε) του προθέτουμε ένα δείκτη «Τ» πάνω δεξιά: π.χ. 

* Έτσι: 





Και με αυτά το σύστημα γράφεται ως:





### Οι λύσεις του συστήματος με δυο οπτικές γωνίες:

#### Α. Οπτική γωνία των γραμμών

* Κάθε μια από τις εξισώσεις  έχει λύσεις ένα επίπεδο (κάθετο στο  μετατοπισμένο κατά διάνυσμα που αυξάνεται με το ). Αυτό δίνει τρία επίπεδα.
* Οι λύσεις του συστήματος πρέπει να ικανοποιούν και τις τρείς εξισώσεις, άρα να ανήκουν ταυτόχρονα και στα τρία παραπάνω επίπεδα.
* Άρα κάθε λύση πρέπει να ανήκει στη τομή των τριών επιπέδων.
* «**Κανονικά**», αν δεν έχουμε μια «εξαιρετική» περίπτωση (που θα τη λέμε **ιδιόμορφη**) δύο επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία και με τη τρίτο επίπεδο αυτή τέμνεται σε ένα σημείο, το  που είναι σε αυτή τη περίπτωση και η μοναδική λύση του συστήματος. Αυτή η περίπτωση ονομάζεται **μη-ιδιόμορφη**

2 επίπεδα

<https://www.geogebra.org/m/QeMWg5Q8>

3 επίπεδα

<https://www.geogebra.org/m/pjczxakm>



* Ποια είναι η ιδιόμορφη περίπτωση? Να έχουμε είτε άπειρες λύσεις είτε καμία λύση
* Υπό ποιές προϋποθέσεις στα  συμβαίνουν αυτά;
  + Αν  τότε τα αντίστοιχα δύο επίπεδα είναι παράλληλα
    - 



* + - 



* + - * Αν έχουμε και  τότε τα δύο επίπεδα ταυτίζονται (ίσως άπειρες λύσεις, και δη αν  )
      * Αν έχουμε και  τότε τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα με κενή τομή (καμία λύση –ασύμβατες εξισώσεις)



* + Ή αν  και  τότε τα αντίστοιχα τρία επίπεδα είναι παράλληλα



* + - * Αν έχουμε  και τότε τα τρία επίπεδα ταυτίζονται και έχουμε άπειρες λύσεις



* + - * Αν έχουμε είτε  είτε  τότε τα τρία επίπεδα έχουν κενή τομή (καμία λύση –ασύμβατες εξισώσεις)



* + Ή αν  τότε
    - * Αν έχουμε και  τότε τα τρία επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία και έχουμε άπειρες λύσεις
      * Αν έχουμε  τότε η ευθεία που είναι τομή των δύο πρώτων επιπέδων είναι παράλληλη στο τρίτο επίπεδο και άρα τα τρία επίπεδα έχουν κενή τομή (καμία λύση –ασύμβατες εξισώσεις)

<https://www.geogebra.org/m/xu2t99AD>

* **Γενικό συμπέρασμα:** Με την οπτική γωνία των γραμμών έχουμε την **ιδιόμορφη περίπτωση** όταν οι αριστερές πλευρές κάποιας γραμμή γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.
* Τότε αν ακριβώς το ίδιο συμβαίνει και με τις δεξιές πλευρές έχουμε άπειρες λύσεις. Αν όχι, οι εξισώσεις είναι ασύμβατες και δεν έχουμε καμία λύση.

#### Β. Οπτική γωνία των στηλών



* Ας δώσουμε ονόματα στις στήλες του συστήματος:



* Το σύστημα γράφεται ως ισότητα διανυσμάτων



* + Που γίνεται με λίγες πράξεις και:



* + Και με τα ονόματα των στηλών που εισάγαμε παίρνουμε:

 θέτοντας και 

* Το σύστημα έχει λύση αν η δεξιά πλευρά () γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στηλών, δηλαδή όταν . Η λύση  δίνεται από τους συντελεστές αυτού του γραμμικού συνδυασμού.
* Υπό ποιές προϋποθέσεις στα  έχουμε την **ιδιόμορφη** **περίπτωση** (καμία ή άπειρες λύσεις);
  + Π.χ. καμία λύση: πότε γίνεται να υπάρχει ****τέτοιο ώστε:



* + - Για να συμβαίνει αυτό πρέπει

 (οπότε θα υπάρχουν)

* + - Αυτό γίνεται μόνο αν κάποια στήλη ανήκει στο επίπεδο που σχηματίζουν οι άλλες δύο, π.χ. αν .
    - Διότι τότε 
  + Αποδεικνύεται ότι τότε ακριβώς έχουμε και τις άπειρες λύσεις:

αν κάποια στήλη ανήκει στο επίπεδο που σχηματίζουν οι άλλες δύο και  τότε θα γράφεται με πολλούς τρόπους ως γ.σ. των .

#### Παράδειγμα των παραπάνω:

Έστω δύο συστήματα με ίδιες αριστερές πλευρές

Α.  και το Β. 

Για τις αριστερές πλευρές έχουμε

 και επομένως 



* Όμως:  και άρα το σύστημα Α έχει λύση.



* + Μάλιστα η παραπάνω λύση δεν είναι μοναδική. Μια άλλη λύση είναι η: 



* + Άρα **βρισκόμαστε στην ιδιόμορφη περίπτωση** διότι το  γράφεται με πολλούς τρόπους ως γ.σ των **.**



* Όμως το Β δεν έχει καμία λύση: η τελευταία εξίσωση είναι ασύμβατη με τις δύο πρώτες, διότι το . Άρα πάλι **βρισκόμαστε στην ιδιόμορφη περίπτωση.**



* ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: **Με την *οπτική γωνία των στηλών* βρισκόμαστε στη ιδιόμορφη περίπτωση** όταν μια στήλη των συντελεστών του συστήματος γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

**Συμπέρασμα:**

* Με την *οπτική γωνία των* ***γραμμών*** βρισκόμαστε στη **ιδιόμορφη περίπτωση** όταν μια γραμμή των συντελεστών του συστήματος γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.
* Με την *οπτική γωνία των* ***στηλών*** βρισκόμαστε στη **ιδιόμορφη περίπτωση** όταν μια στήλη των συντελεστών του συστήματος γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

Άρα: μια **γραμμή** των συντελεστών του συστήματος γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων **τότε και μόνο τότε όταν** μια **στήλη** των συντελεστών του συστήματος γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.