## 14. Προβολές και προσεγγίσεις ελαχίστων τετραγώνων, Μέρος Β.

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 3.3)

#### Σημείωση 1.

Αν  τότε  και 

#### Σημείωση 2.

Αν  τότε  και .

#### Σημείωση 3.

Αν   αντιστρέψιμος τότε  και



#### Σημείωση 4. Για έχουμε

#### .

#### Εδώ η είναι εκ κατασκευής . Άρα .

#### Από την άλλη προφανώς .

#### Επομένως αυτή είναι η διάσπαση του b σε μία σθνιστώσα στον και μία στο ορθογώνιο συμπλήρωμά του, το .

#### Η δεύτερη ισούται με . Άρα ο

#### πίνακας προβολής στο δίνεται από Ι-πίνακα προβολής στο .

Απόδειξη του: «**Εάν οι στήλες του  είναι ανεξάρτητες  αντιστρέψιμος**»

#### Ο πίνακας εσωτερικού γινομένου

* Είναι συμμετρικός
* Έχει τον **ίδιο μηδενόχωρο** με τον Α, διότι

Αν  και

Αν 

.

Άρα όντως:

* αν οι στήλες του  είναι ανεξάρτητες
* τότε ο  έχει τάξη n
* και τότε ο  έχει την ίδια τάξη και άρα είναι αντιστρέψιμος.

**Ιδιότητες:** Αν  πίνακας προβολής τότε:

 (Αν προβάλλω δύο φορές είναι σαν να πρόβαλα μία)

 ( συμμετρικός)

Ισχύει και το ανάποδο: Ένας συμμετρικός πίνακας με  θα είναι πίνακας προβολής σε κάποιο υπόχωρο.

**Απόδειξη:**



και 



διότι  συμμετρικός

#### Η απεικόνιση .

Έστω  ένας υπόχωρος και έστω  μια βάση του .

Είδαμε ότι αν  **είναι ο πίνακας προβολής στο ** τότε  με .

Επίσης .

Θεωρούμε την απεικόνιση .

* Προφανώς .
* Η απεικόνιση αυτή είναι γραμμική και δίνεται από τον :

. Άρα 

* Η εικόνα της απεικόνισης, το σύνολο δηλαδή των εικόνων  για  είναι ο . (Τα πάντα προβάλλονται στον  και σε κάθε  προβάλλεται τουλάχιστον το ίδο το : αν  τότε ).
* Άρα  και τάξη() = dim() = r
* Επίσης αν  τότε  και άρα  και .

**Πρόταση**. Έστω  ένας υπόχωρος και  μια βάση του και  ένας άλλος υπόχωρος και  μια βάση του.

Ορίζουμε ένα καινούργιο υπόχωρο .

Τότε ισχύει πως αν  θα έχουμε , .

Απόδειξη. Ορίζω τους πίνακες ,  και .

Τότε .

Έχουμε:









Άρα 

### Ευθεία ελαχίστων τετραγώνων

Έστω έχω  μετρήσεις  π.χ.  πίεση και  θερμοκρασία.

Οι μετρήσεις αυτές σε διάγραμμα διασποράς βρίσκονται κοντά σε ευθεία (άγνωστη) και **υποψιάζομαι ότι οι δύο ποσότητες συνδέονται με μια γραμμική σχέση την οποία θέλω να εκτιμήσω.**



. .

. .

**. .**

**. .**

**. .** **.**









Πώς; Ιδέα: Βρες **εκείνη την ευθεία (εκείνα τα )** που να είναι **«κοντά στα σημεία», δηλ. όλα τα  μικρά** ή καλύτερα «ελάχιστα».

π.χ.  **ελάχιστο**.

Αλλά 

Που ελαχιστοποιείται για  με .

Σημειώστε ότι η λύση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων **συνδέεται με την προβολή του**  στο 



.









Επίπεδο= 

Θα έχουμε 



Θέτουμε

,



Τότε

 και 

Έτσι









**Αριθμητικό παράδειγμα**:







Άρα , και 



Τα σημεία  στην ευθεία

Τα σημεία  στην ευθεία

Αποκλίσεις , 

**Άλλο παράδειγμα**

Έστω έχω  μετρήσεις , i=1,…,n

Ψάχνω να βρώ μια παραβολή στο t που να προσεγγίζει τα y:



Δηλαδή:

ψάχνω  που να ελαχιστοποιεί την 

Τώρα





Λύση το  με .

Σημειώστε ότι η λύση

**συνδέεται με την προβολή του**  στο **Άλλο παράδειγμα**

Έστω έχω  μετρήσεις , i=1,…,n

Ψάχνω να βρώ μια παραβολή στο t που να προσεγγίζει τα y:



Δηλαδή:

ψάχνω  που να ελαχιστοποιεί την 

Τώρα





Λύση το  με .

Σημειώστε ότι η λύση **συνδέεται με την προβολή του**

 στο 

**Άλλο παράδειγμα**

Έστω έχω  μετρήσεις , i=1,…,n και μια τρίτη δίτιμη μεταβλητή  που ορίζει δυο ομάδες π.χ.  για άνδρες και  για γυναίκες.

Ψάχνω να βρώ μια γραμμιή σχέση στο w που να προσεγγίζει τα y η οποία όμως μπορεί ναέχει διαφορετική σταθερά για άνδρες και γυναίκες.:



Δηλαδή:

ψάχνω  που να ελαχιστοποιεί την 

Τώρα



Λύση το  με .

H λύση **συνδέεται με την προβολή του**  στο .

**Άλλο παράδειγμα**

Έστω έχω  μετρήσεις , i=1,…,n.

Ψάχνω να βρώ μια γραμμική σχέση στο w που να προσεγγίζει τα y η οποία όμως μπορεί να αλλάζει κλίση για  γιακάποιο γνωστο .



με .

Δηλαδή: ψάχνω  που

να ελαχιστοποιεί την 

Τώρα



 

Λύση το  με .

H λύση **συνδέεται με την προβολή του**  στο .