## 14. Προβολές και προσεγγίσεις ελαχίστων τετραγώνων, Μέρος Α.

(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 3.3)

Έστω ένα σύστημα με «πολλές» εξισώσεις και λίγου**ς** αγνώστους:

 με  και .

Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα έχει λύση αν .

**Μπορώ να κάνω «κάτι» αν ;**

### Το πρόβλημα για n=1

Έτσι π.χ. αν , δηλ. ο  είναι μια στήλη  και  το σύστημα έχει λύση αν .

Μπορώ να κάνω «κάτι» αν ;



Ιδέα: Αφού  αδύνατο, **βρες τουλάχιστον  τέτοιο ώστε το  να είναι όσο πιο «κοντά στο 0» γίνεται, δηλαδή να ελαχιστοποιείται το .**

**Βρες **

**Βρες **

Αν θέσω  τότε  και αν  τότε και , tο πρόβλημά μου, λοιπόν, μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί:

Βρες 

ή με λόγια: βρες εκείνο το σημείο  της ευθείας  που **να ελαχιστοποιεί την απόστασή του από το ** (συγκρινόμενο με την απόσταση του  με άλλα σημεία **** της ).











Σχηματικά:



Γεωμετρική λύση: ** η προβολή του  στο .**

Αλγεβρική λύση: Θέτω 

και 

### Ίδιο πρόβλημα για n=2

, 

Βρες 

Καθώς



και θέτοντας  και  το πρόβλημα γράφεται ισοδύναμα:

Βρες 

Ή: **Βρες εκείνο το σημείο  του  που να έχει ελάχιστη απόσταση από το ** (συγκρινόμενο με την απόσταση του  από άλλα σημεία  του ).

Σχηματικά:













**.**



### Ίδιο πρόβλημα για οποιοδήποτε n

Γενικώς:

, 

Βρες 

Θέτοντας  και



το πρόβλημα γράφεται ιοσοδύναμα ως:

Βρες 

με  και .

**Βρες εκείνο το σημείο  που να ελαχιστοποιεί την απόσταση από το .**

Απάντηση: **Θα είναι η προβολή του  στο , δηλαδή εκείνο το σημείο  με  σε κάθε στοιχείο του .**

Διότι: Έστω . Θα δείξουμε 









 εκ κατασκευής διότι 



**Υπολογισμός των , :**

 σε κάθε στοιχείο του 



 





* Η λύση  ικανοποιεί την εξίσωση 
* Εάν οι στήλες του  είναι ανεξάρτητες  αντιστρέψιμος και 
* Τότε και η προβολή του  στο   υπολογίζεται ως .

Ο πίνακας  ονομάζεται **πίνακας προβολής** στο . Έχει την ιδιότητα ότι οποιοδήποτε  πολλαπλασιάσω με τον **** θα πάρω την προβολή του  στο .

**Παράδειγμα 1:** , , 

, , 

Τύπος στο :







άρα 







και   





 

Δηλ. 

**Παράδειγμα 2:** Έστω . Να υπολογιστεί ο πίνακας προβολής  στο .

Με , 





Ερώτηση – Άσκηση: Έστω  ένας υπόχωρος και έστω  μια βάση του . Να βρεθεί πίνακας  τέτοιος που  να είναι για κάθε  το πλησιέστερο στο  σημείο του .

**Απάντηση:** πρέπει να **είναι ο πίνακας προβολής στο **. Για να τον βρω πρέπει να σχηματίσω πίνακα , τέτοιο που . Ο  έχει αυτή την ιδιότητα. Άρα έχουμε .

**Άσκηση για το σπίτι**

**Σεπτ 2004/ Θέμα 5ο**

Δίνονται τα ακόλουθα 4 στοιχεία του R5:

 και 

Έστω  ο υπόχωρος που παράγουν τα a, b και cμαζί και έστω  το ορθογώνιο συμπλήρωμα του .

* 1. Να βρεθεί η προβολή του v στο .
  2. Να βρεθεί πίνακας  τέτοιος ώστε --για οποιοδήποτε -- το  να είναι εκείνο το πλησιέστερο στο  στοιχείο του Ε.
  3. Να βρεθεί πίνακας  τέτοιος ώστε --για οποιοδήποτε -- το  να είναι το πλησιέστερο στο  πολλαπλάσιο του a.
  4. Να βρεθούν και , τέτοια ώστε .
  5. Να βρεθεί ο πίνακας προβολής στοn .

***5.2*** Έστω . Τότε  είναι ο πίνακας προβολής στο  και υπολογίζεται ως .



=?



. Άρα 

=?



=?



Άρα 

**5.1** . Άρα 

***.*** Άρα .



**5.3** Έστω . Να υπολογιστεί ο πίνακας προβολής  στο .

Με , 

=

**5.4** και 

***5.5*** 