## 11. Οι τέσσερις θεμελιώδεις υπόχωροι



(Πηγή: Strang, Κεφάλαιο 2.4)

Έστω  ένας  πίνακας. Έχουμε ήδη γνωρίσει δυο **υπόχωρους που συνδέονται με το :**

* Το **χώρο στηλών** του , :=Span( των στηλών του ).
* Το **μηδενόχωρο** του , 

Προσθέτουμε άλλους δύο:

* Το **χώρο γραμμών** του , :=Span( των γραμμών του )= Span( των στηλών του ).
* Τον **αριστερό μηδενόχωρο** του := το μηδενόχωρο του ,

Στόχος αυτού του κεφαλαίου: **κατασκευή μιας βάσης** για καθένα εξ αυτών.

Χρήσιμη σε αυτή τη κατεύθυνση: η παραγοντοποίηση .

Παράδειγμα:



### Βάση του χώρου γραμμών του ,

Παρατηρούμε ότι:

* Εκ κατασκευής οι γραμμές του  είναι γραμμικοί συνδυσασμοί των γραμμών του . Έπεται:

Span( των γραμμών του ) Span( των γραμμών του )

* Όμως οι γραμμοπράξεις μπορούν να αντιστραφούν. Άρα οι γραμμές του  είναι γραμμικοί συνδυασμοί των γραμμών του . Έπεται:

Span( των γραμμών του ) Span( των γραμμών του )

Άρα:

**Span( των γραμμών του ) Span( των γραμμών του )**

=

Άρα: αρκεί να βρώ βάση του .

* Πάρε ως βάση του  τις **μη-μηδενικές γραμμές του **
* Αυτές θα είναι **ανεξάρτητες** (μη μηδενικές κλιμακωτου)
* Άρα θα είναι βάση του .
* Άρα θα είναι βάση του .

Στο παράδειγμα:  είναι βάση του  (και του ).

**Διάσταση** του =

=πλήθος μη-μηδενικών γραμμων του **=πλήθος οδηγών= **

### Βάση Μηδενόχωρου του ,

* 
* Άρα 

Λύσε ,  οδηγοί.

Βάση του : τα  διανύσματα  που προκύπτουν αν θέσω τις ελεύθερες μεταβλητές διαδοχικά 0 και 1.

Διότι: Προφανώς παράγουν τον  (Έτσι κατασκευάστηκαν). Είχαμε δει .

Και: Η ανεξαρτησία των  εξασφαλίζεται από το ότι για κάθε ελεύθερη μεταβλητή το “1” εμφανίζεται μόνο σε ένα από τα , τα άλλα έχουν “0”.

.

  

Έχουμε:

**Διάσταση** του  = πλήθος ελεύθερων μεταβλητών =  ****

### Βάση του χώρου στηλών του ,

#### Παράδειγμα:

π.χ.  

=πρώτη + (1/3)\*τρίτη

=3\*πρώτη

=πρώτη + (1/3)\*τρίτη

=3\*πρώτη

******, καθως π.χ. τελευταία συντεταγμένη στον  =0, αλλά όχι στον . Όμως οι εξαρτήσεις στις στήλες τους ίδιες:

Ανεξάρτητες είναι στήλες του ****** αν και οι αντίστοιχες του ****** είναι ανεξάρτητες.

Αν κάποιες στήλες του ******εξαρτημένες

οι ίδιες στήλες του ****** είναι εξαρτημένες.

******

 

.

, μ**ε  για τις στήλες** που δε με ενδιαφέρουν τέτοιο που .

******

Πάρε ως βάση του  **τις στήλες του **** που αντιστοιχούν στις στήλες του ****** που έχουν οδηγούς.

Διότι: με βάση τα παραπάνω, καθως οι στήλες αυτές του  είναι ανεξάρτητες θα είναι ανεξάρτητες και οι αντίστοιχες στηλες του .

Εδώ: 1η & 3η  βάση : .

**Διάσταση** του = **πλήθος οδηγών= **

### Βάση Αριστερού Μηδενόχωρου του ,

*  είναι ο Μηδενόχωρος του , δηλαδή τα , εξού και αριστερος μηδενόχωρος.

Εδώ θα βρούμε πρώτα την :

Για κάθε πίνακα  γνωρίζουμε:

Πλήθος ελεύθερων μεταβλ. + πλήθος βασικών μεταβλ.= πληθος στηλών

 +  = 

 +  = πληθος στηλών 

Εφαρμόζοντας το τελευταίο για τον  παιρνουμε:

 +  = πληθος στηλών 



Άρα 



Άρα ψάχνω  ανεξάρτητα  τέτοια που 

Όμως από  παίρνω  που σημαίνει ότι οι  τελευταίες γραμμές του  έχουν ακριβώς αυτή την ιδιότητα, καθως αντιστοιχουν στις μηδενικές γραμμές του  (σκεφτείτε το με το μνημονικό κανόνα).



Πάρε ως **βάση του ** τις  τελευταίες γραμμές του .

Αρκεί να δείξουμε ότι είναι ανεξάρτητα!



**Όμως**

* οι γραμμές τριγωνικού πίνακα (L) με 1 στη διαγώνιο είναι ανεξάρτητες.
* Παρομοίως και οι γραμμές και του αντιστρόφου του που είναι παλι τριγωνικός.
* Ο πολ/μος με P από δεξιά εναλλάσσει στήλες και δε χαλάει την ανεξατησία των γραμμών.

**Θεμελιώδες Θεωρημα της Γραμμικής Αλγεβρας Ι.**

Αν  με  οδηγούς τότε:

1. 
2. 
3. 
4. 

Άλλο παράδειγμα: Να βρεθούν βάσεις των θεμελιωδών υποχώρων του



Άσκηση για το σπίτι: παρομοιως για τον 