

2016

Πιθανότητες II

Tutorial 5

1)

Έστω ότι N άνδρες πετάνε τα καπέλα τους στο πάτωμα ενός δωματίου. Τα καπέλα ανακατεύονται και ο κάθε άνδρας διαλέγει ένα καπέλο κατά τυχαίο τρόπο.

(α) Να βρείτε τη μέση τιμή του αριθμού των ανδρών που διαλέγουν τα δικά τους καπέλα.

(β) Να υπολογίσετε τη διασπορά του αριθμού των ανδρών που διαλέγουν τα δικά τους καπέλα.

2)

Έστω X, Y, Z τρεις ανεξάρτητες τ.μ. και κάθε μια ακολουθεί την εκθετική κατανομή με μέση τιμή λ .

Να υπολογιστεί ο συντελεστής συσχέτισης των τ.μ. $U = X + Y$ και $W = Y + Z$.

3)

Αν για τις τ.μ. X, Y είναι γνωστό ότι $E(X)=2, E(Y)=3, V(X)=2, V(Y)=1$ και $E(XY)=5$, να υπολογιστεί η μέση τιμή των παραστάσεων (τ.μ.)

$$X^2 + Y^2, (X + Y)^2, 3X^2 + 5Y^2 + 7, (X + Y)(X - Y), (2X + Y + 1)(X + 2Y + 1).$$

4)

Αν για τις τ.μ. X, Y είναι γνωστό ότι $E(X) = 4, Var(X) = 4, E(Y) = 2, Var(Y) = 9, \rho_{x,y} = \frac{5}{6}$

Να υπολογιστούν οι ποσότητες

$$E(X^2), Cov(X, Y), E(XY), Cov(2X + 3, 1 - Y), Var(X + Y), Var(3X - Y), Cov(2X, X + Y)$$

5)

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας μιας διδιάστατης διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής (X, Y) δίνεται από τον τύπο $f(x, y) = \frac{3x(x+y)}{5}, 0 < x < 1, 0 < y < 2$ και $f(x, y) = 0$, αλλού.

(α) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P\left(0 < X < \frac{1}{2}, 1 < Y < 2\right)$.

(β) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας $f_X(x), f_Y(y)$.

(γ) Να βρεθεί η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x, y)$.

(δ) Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών $F_X(x), F_Y(y)$.