Πρόταση (Σημαντική)

Έστω $X \sim b(\nu, p)$. Αν για $\nu \to \infty$ και $p \to 0$, $\nu p \to \lambda > 0$ τότε η κατανομή της X μπορεί να προσεγγιστεί από την κατανομή Poisson με παράμετρο λ, δηλαδή:

$$\binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x} \simeq e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \qquad \lambda = \nu p \quad \begin{pmatrix} \nu \geq 20 \\ p \leq \frac{10}{\nu} \end{pmatrix}$$

<u>πχ.</u> Η πιθανότητα ατυχήματος σ' ένα σημείο στην εθνική οδό ισούται με 0.0001. Διέρχονται 1000 αυτοκίνητα κατά τη διάρκεια ενός Σαββατοκύριακου. Ποιά είναι η πιθανότητα να γίνουν δύο ή περισσότερα ατυχήματα.

<u>Απάντηση</u>: Έστω

$X = \#$ ατυχημάτων κατά τη διάρκεια του Σαββατοκύριακου

$$X \sim b(1000 = \nu,\ p = 0.0001)$$

$$P(X = x) = \binom{1000}{x} 0.0001^x * 0.9999^{1000-x}, \quad x = 0, \dots, 1000$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0.9999^{1000} - 1000 * 0.0001 * 0.9999^{999}$$
$$\simeq 0.004675$$

Όμως κατά προσέγγιση

$$X \sim P(1000 * 0.0001) = P(0.1) \qquad \lambda = 1000 * 0.0001 = 0.1$$

$$P(X = x) \simeq e^{-0.1} \frac{0.1^x}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

$$P(X \geq 2) \simeq 1 - e^{-0.1} \frac{0.1^0}{0!} - e^{-0.1} \frac{0.1^1}{1!} = 1 - e^{-0.1}(1 + 0.1) = 1 - 1.1 e^{-0.1}$$
$$= 0.00467884$$

Πχ Έστω $X = \#$ τυπογραφικών λαθών σε μία σελίδα

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda = 2)$$

Να υπολογιστεί το ποσοστό των σελίδων του βιβλίου που περιέχουν:

α) ακριβώς δύο τυπογραφικά λάθη

β) τουλάχιστον " " "

γ) περισσότερα από δύο αλλά λιγότερα από 6 τυπογραφικά λάθη.

Απάντηση: $P(X = x) = e^{-2} \dfrac{2^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$

α) $P(X=2) = e^{-2} \dfrac{2^2}{2!} = 2e^{-2} \simeq 0.2707$ περίπου 27%

β) $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$$= 1 - e^{-2}\frac{2^0}{0!} - e^{-2}\frac{2^1}{1!} = 1 - 3e^{-2} \simeq 0.5939$$

περίπου 59%

γ) $P(2 < X < 6) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$$= e^{-2}\left(\frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!}\right)$$

$\cong 0.307$ περίπου 30.7%

Πρόταση: Αν $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ τότε: $\mu = E(X) = \lambda$

$\sigma^2 = V(X) = \lambda$

Απόδειξη:

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} \overset{Y=x-1}{=\!=} \lambda e^{-\lambda} \sum_{Y=0}^{\infty} \frac{\lambda^Y}{Y!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mu_{(2)} = E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1) \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} \overset{Y=x-2}{=\!=} e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{Y=0}^{\infty} \frac{\lambda^Y}{Y!} = e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E[X(X-1)] + E(X) - [E(X)]^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

πχ. Έστω X = # ατόμων που δεν εμφανίζονται στην πτήση ενώ έχουν κάνει κράτηση.

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda = 10)$$

α) Ποιά είναι η πιθανότητα ένα άτομο που βρίσκεται στην 3η θέση της λίστας αναμονής να μπορέσει να ταξιδέψει;

Απάντηση:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \sum_{x=0}^{2} P(X = x)$$

$$= 1 - e^{-10} \frac{10^0}{0!} - e^{-10} \frac{10^1}{1!} - e^{-10} \frac{10^2}{2!} \simeq 0.997$$

β) Αν τρία άτομα τα οποία είχαν κάνει κράτηση έχουν ήδη ακυρώσει την κράτηση, ποιά είναι η πιθανότητα το έκτο άτομο της λίστας αναμονής να μην μπορέσει να ταξιδέψει;

Απάντηση: $P(X<6 \mid X \geq 3) = \dfrac{P(3 \leq X < 6)}{P(X \geq 3)}$

$$= \frac{\sum_{x=3}^{5} e^{-10} \frac{10^x}{x!}}{0.0997} \simeq 0.6449$$

Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Μία συνεχής τ.μ. παίρνει τιμές σ' ένα διάστημα του $\mathbb{R}$ ή σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$.

Ορισμός: X τ.μ. Έστω ότι υπάρχει $f: \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ τέτοιο ώστε: $P(X \in A) = \int_A f(x)dx$, όπου A διάστημα ή ένωση διαστημάτων του $\mathbb{R}$, τότε η τ.μ. X λέγεται συνεχής και η συνάρτηση f ονομάζεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ή συνάρτηση πυκνότητας της X

Σημείωση: Έστω $A = (-\infty, t]$. Τότε η συνάρτηση κατανομής της X

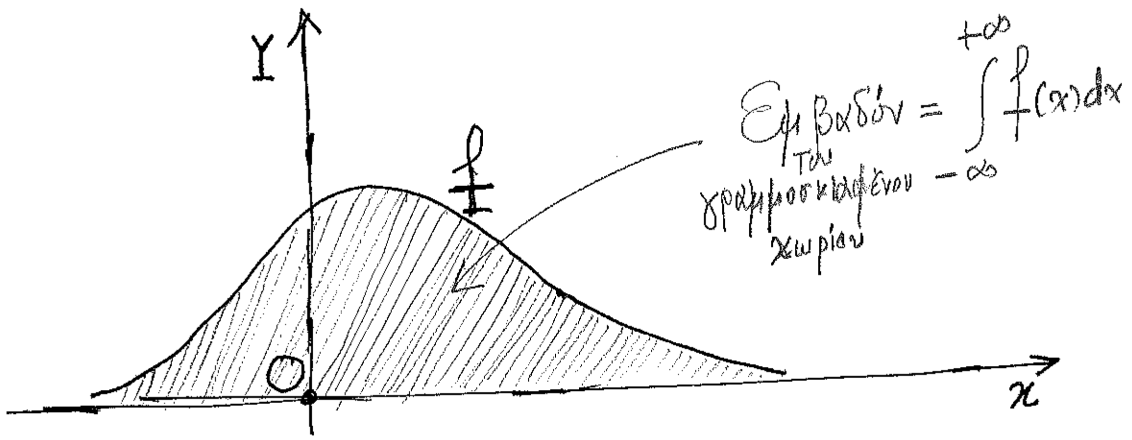
$$F(t) = P(X \leq t) = P(X \in (-\infty, t]) = \int_A f(x)dx = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

$$\Longrightarrow F'(t) = f(t)$$

Επίσης:

$$1 = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in (-\infty, +\infty)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Η παραπάνω σχέση γεωμετρικά σημαίνει ότι το Εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στο γράφημα της f και τον οριζόντιο άξονα ισούται με 1



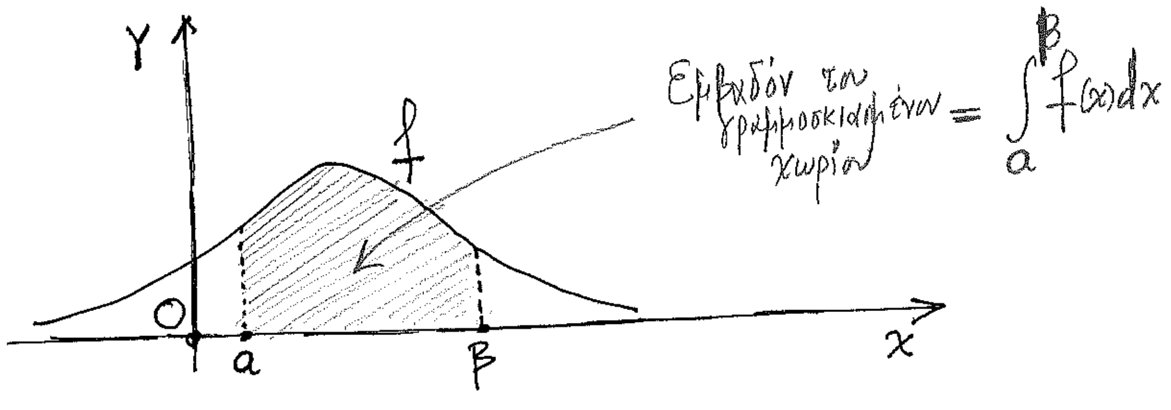
Οι ιδιότητες:

- $f(x) \geq 0, \; x \in \mathbb{R}$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

είναι χαρακτηριστικές ιδιότητες μιάς συνεχούς τ.μ.

Έστω $A = [a, \beta]$, $a \leq \beta$. Τότε

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq \beta) = \int_A f(x) = \int_a^\beta f(x)dx$$



Έστω $a=\beta$. Τότε

$$P(X=a)=P(a\leq X\leq a)=\int_a^a f(x)dx=0,$$

δηλαδή η πιθανότητα η συνεχής τ.μ. X να είναι ίση με $a\in\mathbb{R}$ ισούται με μηδέν.

Οπότε: $P(X<a)=P(X\leq a)$

$$P(a\leq X<\beta)=P(a\leq X\leq \beta)=P(a<X\leq\beta)=P(a<X<\beta)$$

π.χ. Έστω X χρόνος ζωής ενός λαμπτήρα (σε 1000-άδες ώρη).
Η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από τον τύπο:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{c}{x^3}, & 1\leq x\leq 3\\ 0, & x\notin[1,3]\end{cases} \qquad c\in\mathbb{R}$$

Ισχύει: $$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1 \Rightarrow \int_1^3\frac{c}{x^3}dx=1$$

$$\Rightarrow c\left[\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\right]_1^3=1\Rightarrow c\left[\frac{x^{-2}}{-2}\right]_1^3=1$$

$$\Rightarrow c\left(-\frac{1}{2*3^2}+\frac{1}{2*1^2}\right)=1 \Rightarrow c=\frac{9}{4}$$

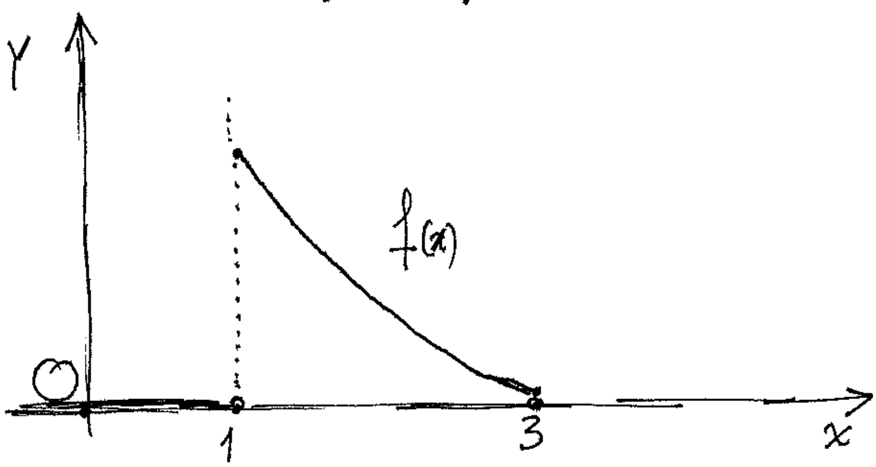
Οπότε:

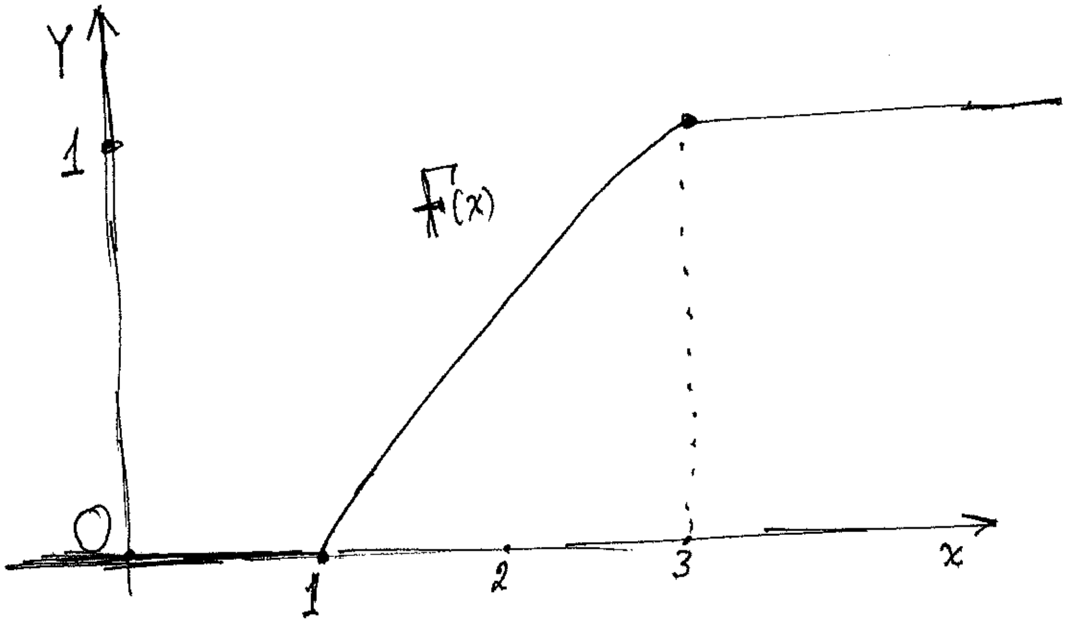
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{9}{4x^3}, & 1\leq x\leq 3\\ 0, & x\notin[1,3].\end{cases}$$

Η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. X έχει τύπο:

$$F(t) = P(X \leqslant t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = \begin{cases} 0, & t \leqslant 1 \\ \int_{0}^{t} \frac{9}{4x^3}\,dx, & 1 < t < 3, \\ 1, & t \geqslant 3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & t \leqslant 1 \\ \frac{9}{8}\left(1 - \frac{1}{t^2}\right), & 1 \leqslant t < 3 \\ 1, & t \geqslant 3 \end{cases}$$





$$P(X>2) = 1-P(X\leq 2) = 1-F(2) = \frac{5}{32}$$

$$P(2\leq X\leq 2.5) = F(2.5)-F(2) = \frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{6.25}\right) - \frac{9}{8}\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{81}{800} \simeq 0.1$$

$$P(X>2) = \int_2^{+\infty} f(x)dx = \int_2^3 \frac{9}{4x^3}dx = \frac{5}{32}$$

$$P(X\leq 2.5 \mid X>2) = \frac{P(2<X\leq 2.5)}{P(X>2)} = \frac{81/800}{5/32} \simeq 0.65$$

Πχ. Ο χρόνος X (σε λεπτά) μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων των συρμών του μετρό είναι μια συνεχής τ.μ. με σ.κ.

$$F(t) = \begin{cases} c-e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{2t}{5}e^{-\frac{2t}{5}}, & t>0 \\ 0, & t\leq 0 \end{cases} \qquad c\in\mathbb{R}$$

α) Ποιά είναι η τιμή της σταθεράς c και ποιός είναι ο τύπος της συνάρτησης πυκνότητας της τ.μ. X

Απάντηση:

Από τον τύπο της $F(t)$: $\lim_{t\to\infty} F(t) = c$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$

Άρα: $c=1$

Η συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = F'(x) = \left(1-e^{-\frac{2}{5}t} - \frac{2t}{5}e^{-\frac{2t}{5}}\right)' = \frac{4}{25}xe^{-\frac{2}{5}x}, \quad x>0$$

$$f(x) = 0, \quad x\leq 0$$

β) Αν κάποιος φτάσει στον σταθμό την στιγμή που φεύγει ένας συρμός, ποιά είναι η πιθανότητα να χρειαστεί να περιμένει i) λιγότερο από 5 λεπτά και ii) από 1 έως 3 λεπτά.

Απάντηση:

i) $P(X<5) = F(5) = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} \simeq 0.59$

ii) $P(1<X<3) = F(3) - F(1) = \left(1 - e^{-6/5} - \frac{6}{5}e^{-6/5}\right)$

$-\left(1 - e^{-2/5} - \frac{2}{5}e^{-2/5}\right) = \frac{7}{5}e^{-2/5} - \frac{11}{5}e^{-6/5} \simeq 0.276$

Ορισμός: Έστω X συνεχής τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας f.
Η μέση τιμή ή αναμενόμενη τιμή της X ορίζεται ως εξής:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \qquad \text{εφόσον: } \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\,dx < +\infty.$$

π.χ. Έστω X = συνολικός χρόνος (σε ώρες) της ημερήσιας χρήσης ενός μηχανήματος αυτόματων συναλλαγών είναι τ.μ. με συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x & 0 \leqslant x \leqslant 3 \\ -\frac{1}{9}(x-6) & 3 < x \leqslant 6 \end{cases}$$

Να βρεθεί ο μέσος ημερήσιος χρόνος χρήσης του μηχανήματος.

Απάντηση: $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_0^3 x\frac{1}{9}x\,dx + \int_3^6 x\left[-\frac{1}{9}(x-6)\right]dx$

$= \frac{1}{9}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 + \left(-\frac{1}{9}\right)\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_3^6 - 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^6\right\}$

$= 3$

<u>Πρόταση</u>: X συνεχής τ.μ. Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\,dx$$

<u>Πρόταση</u>: $E[\lambda_1 g_1(X) + \lambda_2 g_2(X) + \dots + \lambda_k g_k(X)]$

$$= \lambda_1 E[g_1(X)] + \lambda_2 E[g_2(X)] + \dots + \lambda_k E[g_k(X)].$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

<u>Πόρισμα</u>: $E(aX + \beta) = aE(X) + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$

<u>Ορισμός</u>: Έστω X συνεχής τ.μ. γιά την οποία υπάρχει η μέση τιμή $\mu = E(X)$. Η <u>διακύμανση</u> της X είναι

$$V(X) = \sigma^2 = E\left[(X - \mu)^2\right]$$ (εφόσον υπάρχει η μέση τιμή του δεξιού μέλους)

$\sigma = \sqrt{V(X)}$: τυπική απόκλιση της X

<u>Ισχύουν ότι</u>:

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$V(aX + \beta) = a^2 V(X), \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\sigma_{aX+\beta} = |a| \sigma_X, \quad a, \beta \in \mathbb{R}$$