ΠΧ 'Ενα αεροπλάνο πραγματοποιεί επιτυχή πτήση μόνον αν τουλάχιστον οι μισές από τις μηχανές που διαθέτει λειτουργούν. Αν η πιθανότητα να χαλάσει μια μηχανή είναι ίση με $1-p$, γιά ποιές τιμές του p ένα δικινητήριο αεροπλάνο είναι προτιμότερο από ένα τετρακινητήριο ;

Απάντηση: 'Εστω X_ν, $\nu=1,2,\ldots$ = # μηχανών ενος ν-κινητήριου αεροπλάνου που παραμένουν σε λειτουργία καθ' όλη την διάρκεια της πτήσης

$$X_\nu \sim b(\nu, p)$$

$$P(X_4 \geq 2) = P(X_4=2)+P(X_4=3)+P(X_4=4) = 6p^2(1-p)^2+4p^3(1-p)+p^4$$

(πιθανότητα επιτυχούς πτήσης ενός τετρακινητηρίου αεροπλάνου)

$$P(X_2 \geq 1) = P(X_2=1)+P(X_2=2) = 2p(1-p)+p^2$$

(πιθανότητα επιτυχούς πτήσης ενός δικινητηρίου αεροπλάνου)

Θέλουμε: $$P(X_2 \geq 1) \geq P(X_4 \geq 2)$$

$$\iff (p-1)^2(3p-2) \leq 0$$

$$\iff p \leq \frac{2}{3}$$

<u>Πρόταση</u>: $X \sim b(\nu, p)$

$$\mu = E(X) = \nu p \qquad (*)$$

$$\sigma^2 = V(X) = \nu p q \qquad (**)$$

<u>Απόδειξη</u>:

Κατ' αρχάς αποδεικνύουμε την $(*)$:

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\nu} x P(X=x) = \sum_{x=0}^{\nu} x \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x} = \sum_{x=1}^{\nu} x \binom{\nu}{x} p^x q^{\nu-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{\nu} x \frac{\nu!}{x!(\nu-x)!} p^x q^{\nu-x} = \nu p \sum_{x=1}^{\nu} \frac{(\nu-1)!}{(x-1)!(\nu-x)!} p^{x-1} q^{\nu-x}$$

$$\underset{\overline{\overline{}}}{y=x-1} \; \nu p \sum_{y=0}^{\nu-1} \frac{(\nu-1)!}{y!(\nu-1-y)!} p^y q^{\nu-1-y} = \nu p \sum_{y=0}^{\nu-1} \binom{\nu-1}{y} p^y q^{\nu-1-y}$$

$$= \nu p (p+q)^{\nu-1} = \nu p.$$

Αποδεικνύουμε την $(**)$:

$$E[X(X-1)] = \sum_{x=0}^{\nu} x(x-1) P(X=x) = \sum_{x=2}^{\nu} x(x-1) \frac{\nu!}{x!(\nu-x)!} p^x q^{\nu-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{\nu} \frac{\nu!}{(x-2)!(\nu-x)!} p^x q^{\nu-x} = \nu(\nu-1)p^2 \sum_{x=2}^{\nu} \frac{(\nu-2)!}{(x-2)!(\nu-x)!} p^{x-2} q^{\nu-x}$$

$$\underset{\overline{\overline{}}}{y=x-2} \; \nu(\nu-1)p^2 \sum_{y=0}^{\nu-2} \frac{(\nu-2)!}{y!(\nu-2-y)!} p^y q^{\nu-2-y}$$

$$= \nu(\nu-1)p^2 \sum_{y=0}^{\nu-2} \binom{\nu-2}{y} p^y q^{\nu-2-y}$$

$$= \nu(\nu-1)p^2 (p+q)^{\nu-2} = \nu(\nu-1)p^2$$

Συνεπώς: $E(X^2) = \nu(\nu-1)p^2 + E(X) = \nu(\nu-1)p^2 + \nu p$

$$V(X) = \nu(\nu-1)p^2 + \nu p - \nu^2 p^2 = \cancel{\nu^2 p^2} - \nu p^2 + \nu p - \cancel{\nu^2 p^2} = \nu p(1-p) = \nu p q$$

IIX. Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 15 άτομα με ίδια ηλικία. Κάθε άτομο με πιθανότητα 0.7 θα ζει μετά από 20 χρόνια.

α) Ποιά είναι η πιθανότητα μετά από είκοσι χρόνια

(i) Να ζουν και οι 15 ασφαλισμένοι

(ii) Να μην ζει ούτε ένας από τους 15 ασφαλισμένους

β) Αν ένας ασφαλισμένος ζήσει 20 χρόνια, λαμβάνει αποζημίωση 10.000 €. Ποιά είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του ποσού που θα πληρώσει η εταιρία;

Απάντηση: α) Έστω $X = \#$ ασφαλισμένων που ζουν μετά από 20 χρόνια

$$X \sim b(15, 0.7)$$

$$P(X=x) = \binom{15}{x} 0.7^x 0.3^{15-x}, \quad x = 0, \ldots, 15$$

(i) $P(X=15) = \binom{15}{15} 0.7^{15} 0.3^{15-15} = 0.7^{15} \simeq 0.005$

(ii) $P(X=0) = \binom{15}{0} 0.7^0 0.3^{15-0} = 0.3^{15} \simeq 10^{-8}$

β) $Y = 10.000X$

$$E(Y) = 10.000\,E(X) = 10000 * 15 * 0.7 = 105000 \text{ €}$$

$$V(Y) = 10000^2 V(X) = 10000^2 * 15 * 0.7 * 0.3 = 315\,000\,000$$

$$\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{315\,000\,000} = 17748.2 \text{ €}$$

<u>Ορισμός</u>: Θεωρούμε ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p, σταθερή γιά όλες τις δοκιμές. Έστω

X = # δοκιμών μέχρι την $1^{η}$ επιτυχία

$X \in \{1, 2, \dots\}$

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την <u>Γεωμετρική κατανομή</u> με πιθανότητα επιτυχίας p.

<u>Συμβολισμός</u>: $X \sim G(p)$

$$f(x) = P(X=x) = P(1^{η} \text{ δοκιμή αποτυχία}, \dots, x-1 \text{ δοκιμή αποτυχία}, x \text{ δοκιμή επιτυχία})$$

συνάρτηση πιθανότητας

$$\overset{\text{λόγω ανεξαρ. δοκιμών}}{=} P(1^{η} \text{ δοκιμή αποτυχία}) \cdots P(x-1 \text{ δοκιμή αποτυχία}) P(x \text{ δοκιμή επιτυχία})$$

$$= \underbrace{q \cdots q}_{x-1 \text{ φορές}} p = q^{x-1} \cdot p, \quad x = 1, 2, \dots$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{x=1}^{\infty} f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} \cdot p = p \sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = p \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Η <u>συνάρτηση κατανομής</u> της X έχει τύπο:

$$F(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 1 \\ \sum_{x=1}^{[t]} f(x) & \text{αν } t \geq 1. \end{cases}$$

$$\sum_{x=1}^{[t]} f(x) \overset{k=[t]}{=} \sum_{x=1}^{k} q^{x-1} p = p \sum_{x=1}^{k} q^{x-1} = p(1 + q + \dots + q^{k-1})$$

$$= p \frac{1-q^k}{1-q} = p \frac{1-q^k}{p} = 1 - q^k = 1 - q^{[t]}$$

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ 1 - q^{[t]}, & t \geq 1 \end{cases}$$

<u>πχ</u> Ζάρι ρίχνεται συνεχώς μέχρις ότου εμφανιστεί άσσος. Ποιά είναι η πιθανότητα να συμβεί αυτό

α) στην $10^{η}$ ρίψη ;

β) πριν από την $10^{η}$ ρίψη ;

γ) μετά την $10^{η}$ ρίψη ;

<u>Απάντηση</u>: $X = \#$ ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά άσσος

$X \sim G(p),\ p = \frac{1}{6}$

$f(x) = P(X=x) = \left(\frac{5}{6}\right)^{x-1}\frac{1}{6}, \quad x = 1,2,\dots$

$$F(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{αν } t<1 \\ 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{[t]} & \text{αν } t \geq 1. \end{cases}$$

α) $P(X=10) = \left(\frac{5}{6}\right)^{9}\frac{1}{6} \simeq 0.032$

β) $P(X<10) = P(X \leq 9) = F(9) = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^{9} \simeq 0.806$

γ) $P(X>10) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - \left[1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}\right] \simeq 0.162$

<u>$2^{ος}$ τρόπος για β) και γ):</u>

$Y_\nu = \#$ άσσων στις ν ρίψεις ζαριού, $Y_\nu \sim b(\nu, \frac{1}{6})$

$P(Y_\nu = y) = \binom{\nu}{y}\left(\frac{1}{6}\right)^{y}\left(\frac{5}{6}\right)^{\nu-y}, \quad y = 0,\dots,\nu$

β) $P(Y_9 \geq 1) = 1 - P(Y_9 = 0) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{9}$

γ) $P(Y_{10} = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$

Πρόταση: $X \sim G(p)$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p} \quad , \quad \sigma^2 = V(X) = \frac{q}{p^2}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε μόνον τον τύπο της μέσης τιμής.

$$\mu = E(X) = \sum_{x \in R_X} x f(x) = \sum_{x=1}^{\infty} x p q^{x-1} = p \underline{\sum_{x=1}^{\infty} x q^{x-1}} \quad (*)$$

Παρένθεση: $\sum_{x=0}^{\infty} t^x = 1 + t + t^2 + \cdots = \frac{1}{1-t}$, $|t|<1$

Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι:

$$\sum_{x=1}^{\infty} x t^{x-1} = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Εφαρμόζοντας τον παραπάνω τύπο στην (*) έχουμε:

$$\mu = E(X) = p \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

πχ. Ρίχνουμε ένα ζάρι (αμερόληπτο) συνεχώς. Ο αναμενόμενος αριθμός ρίψεων μέχρι να εμφανιστεί για πρώτη φορά άσσος ισούται με

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

πχ. Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ~~ζάρι~~ νόμισμα συνεχώς. Ο αναμενόμενος αριθμός των ρίψεων μέχρι να ~~εμφανιστούν~~ εμφανιστεί για πρώτη φορά κορώνα ισούται με:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Σημαντική Σημείωση: (Ιδιότητα Έλλειψης της γεωμετρικής κατανομής)

$$P(X > k+r \mid X > k) = P(X > r), \quad k, r \text{ μη αρνητικοί ακέραιοι}$$

Απάντηση:

$$P(X > k+r \mid X > k) = \frac{P(X>k+r, X>k)}{P(X>k)} = \frac{P(X>k+r)}{P(X>k)}$$

$$= \frac{q^{k+r}}{q^{k}} = q^{r} = P(X>r)$$

Σημείωση: $Y = \#$ αποτυχιών μέχρι την 1η επιτυχία

$$Y = X - 1 \qquad \underbrace{\overbrace{a\ a \cdots a}^{Y}\ \varepsilon}_{X}$$

$$f_Y(y) = P(Y=y) = q^{y} \cdot p, \quad y = 0, 1, \ldots$$

Ορισμός: Θεωρούμε μια ακολουθία ανεξαρτήτων δοκιμών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p σταθερή σε όλες τις δοκιμές.

$X = \#$ δοκιμών μέχρι την πραγματοποίηση της r επιτυχίας

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους r και p. Το σύνολο των δυνατών τιμών της X είναι $R_X = \{r, r+1, \ldots\}$

Συμβολισμός: $X \sim NB(r, p)$

Πρόταση: $f(x) = P(X=x) = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$, $x = r, r+1, \ldots$

Απόδειξη: $P(X=x) = P($στην δοκιμή x έχουμε επιτυχία και στις δοκιμές $1, 2, \ldots, x-1$ έχουμε $r-1$ επιτυχίες$)$

$\underset{\text{λόγω ανεξαρτησίας δοκιμών}}{=}$ $P($στην δοκιμή x έχουμε επιτυχία$)P($έχουμε $r-1$ επιτυχίες στις $x-1$ δοκιμές$)$

$$= p \binom{x-1}{r-1} p^{r-1} q^{x-1-(r-1)} = \binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$$

Πρόταση: $X \sim NB(r, p)$. Τότε $\mu = E(X) = \frac{r}{p}$ και

$$\sigma^2 = V(X) = \frac{rq}{p^2}$$

πχ. Στον τελικό των play-offs έχουν προκριθεί δύο ομάδες α και β οι οποίες παίζουν μέχρις ότου κάποια συμπληρώσει τρεις νίκες. Οι αγώνες αποτελούν ανεξάρτητες δοκιμές. Η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα α είναι 0.48 ενώ η πιθανότητα να κερδίσει η ομάδα β είναι 0.52.

α) Ποιά είναι η πιθανότητα να χρειαστούν να γίνουν 5 παιχνίδια μέχρις ότου αναδειχθεί ο πρωταθλητής;

β) Αν για την ανάδειξη του πρωταθλητή έχουν χρειαστεί 5 αγώνες, ποιά είναι η πιθανότητα πρωταθλήτρια να είναι η ομάδα α;

Απάντηση: α) $X_1 =$ # αγώνων μέχρι να συμπληρώσει 3 νίκες η ομάδα α

$X_2 =$ " " " " " " " " β

$X_1 \sim NB(3, 0.48)$ $\quad$ $X_2 \sim NB(3, 0.52)$

$$f_1(x) = P(X_1 = x) = \binom{x-1}{2} 0.48^3 * 0.52^{x-3}, \quad x = 3, 4, \ldots$$

$$f_2(x) = P(X_2 = x) = \binom{x-1}{2} 0.52^3 * 0.48^{x-3}, \quad x = 3, 4, \ldots$$

A : Η ομάδα α αναδεικνύεται πρωταθλήτρια σε 5 παιχνίδια

B : " " β " " " " .

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = P(X_1 = 5) + P(X_2 = 5)$$

$$= \binom{4}{2} 0.48^3 * 0.52^2 + \binom{4}{2} 0.52^3 * 0.48^2 \simeq 0.37$$

β) $$P(A \mid A \cup B) = \frac{P[A(A \cup B)]}{P(A \cup B)} = \frac{P(A)}{P(A \cup B)} = \frac{0.1794}{0.3738} \simeq 0.48$$

Υπεργεωμετρική Κατανομή

Ορισμός: Έστω ότι ~~μία~~ κάλπη περιέχει α άσπρες και β μαύρες σφαίρες. Εξάγουμε χωρίς επανάθεση, την μία μετά την άλλη, ν σφαίρες. Έστω

X = # άσπρων σφαιρών που περιέχονται στο δείγμα των ν σφαιρών.

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την υπεργεωμετρική κατανομή με παραμέτρους α, β, ν.

Συμβολισμός: $X \sim h(\nu, \alpha, \beta)$

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{\alpha}{x}\binom{\beta}{\nu - x}}{\binom{\alpha+\beta}{\nu}}, \quad x = \max(0, \nu-\beta), \ldots, \min(\nu, \alpha)$$

Πχ. Ένας φαρμακοποιός έχει

16 μπουκάλια παιδικού αντιπυρετικού — 5 με ημερομηνία λήξης σε 10 μέρες, 11 με ημερομηνία λήξης σε 1 χρόνο

Διαλέγει 8 μπουκάλια στην τύχη.

Ποιά είναι η πιθανότητα να βρεί τουλάχιστον 3 με την κοντινή ημερομηνία λήξης.

Απάντηση: Έστω:

X = # μπουκαλιών με την κοντινή ημερομηνία λήξης (στο δείγμα των 8 που διαλέχτηκαν).

$X \sim h(8,5,11)$

$$f(x) = P(X=x) = \frac{\binom{5}{x}\binom{11}{8-x}}{\binom{16}{8}}, \quad x = 0,\dots,5$$

$$P(X \geq 3) = \sum_{x=3}^{5} P(X=x) = \frac{\binom{5}{3}\binom{11}{5}}{\binom{16}{8}} + \frac{\binom{5}{4}\binom{11}{4}}{\binom{16}{8}} + \frac{\binom{5}{5}\binom{11}{3}}{\binom{16}{8}} = 0.5$$

Κατανομή Poisson

Ορισμός: Έστω X τ.μ. διακριτή με σύνολο τιμών $R_X = \{0,1,\dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x) = P(X=x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,\dots \text{ όπου } \lambda > 0.$$

Λέμε ότι η τ.μ. X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ.

Συμβολισμός: $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ή $X \sim Poisson(\lambda)$