<u>Ορισμός</u>: Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3 \subseteq \Omega$ λέγονται <u>ανεξάρτητα</u> αν:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2)$$
$$P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$$
$$P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$$
$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

<u>Ορισμός</u>: Τα ενδεχόμενα $A_1, A_2, A_3 \subseteq \Omega$ λέγονται <u>ανεξάρτητα κατά ζεύγη</u> αν:

$$P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2), \quad P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3), \quad P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

<u>Ερώτηση</u>: Αν A_1, A_2, A_3 κατά ζεύγη ανεξάρτητα είναι ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ;

<u>Απάντηση</u>: ΌΧΙ πάντοτε. Δίνουμε παρακάτω ένα παράδειγμα, στο οποίο A_1, A_2, A_3 είναι κατά ζεύγη ανεξάρτητα αλλά όχι ανεξάρτητα.

<u>π.χ.</u> κληρωτίδα με 4 λαχνούς με ενδείξεις a_1, a_2, a_3, $a_1 + a_2 + a_3$ δώρα

Ένα άτομο διαλέγει έναν λαχνό στην τύχη.

A_i : Το άτομο κερδίζει δώρο a_i, $i = 1, 2, 3$

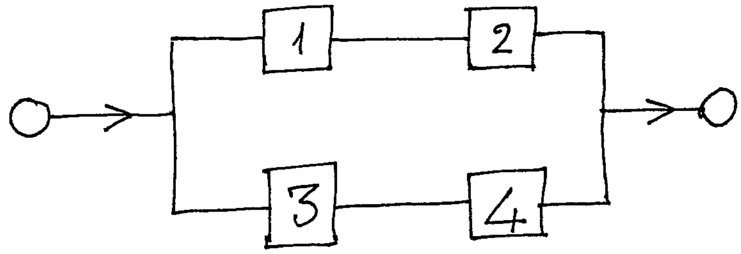
$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} \qquad P(A_1A_2) = P(A_1A_3) = P(A_2A_3) = \frac{1}{4}$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{1}{4}$$

<u>Ισχύει</u>: $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \quad 1 \leq i < j \leq 3$

$$P(A_1A_2A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

<u>π.χ.</u> Σ' ένα σύστημα παραγωγής υπάρχουν 4 εξαρτήματα τα οποία λειτουργούν το ένα ανεξάρτητα από το άλλο.



A_i: Η μονάδα i του συστήματος λειτουργεί, $i=1,2,3,4$

$P(A_1)=0.85$ $\quad P(A_2)=0.90$ $\quad P(A_3)=0.98$ $\quad P(A_4)=0.8$

Ποιά είναι η πιθανότητα λειτουργίας του συστήματος;

<u>Απάντηση</u>: αξιοπιστία του συστήματος $\leftarrow R = P(A_1A_2 \cup A_3A_4)$

$$= P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)$$
$$= P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$
$$= 0.85*0.9+0.98*0.8-0.85*0.9*0.98*0.8=0.59976$$

<u>π.χ.</u> $A_1,\dots,A_\nu$ ν ανεξάρτητα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A_i)=p_i$, $i=1,\dots,\nu$. Να υπολογιστούν συναρτήσει των $p_1,\dots,p_\nu$

α) Η πιθανότητα να μην εμφανιστεί κανένα από τα ενδεχόμενα $A_1,\dots,A_\nu$.

β) " " να " τουλάχιστον ένα από τα " ".

<u>Απάντηση</u>:

α) $A=A_1'A_2'\cdots A_\nu'$

$$P(A)=P(A_1'A_2'\cdots A_\nu')=\prod_{i=1}^{\nu}P(A_i')=\prod_{i=1}^{\nu}[1-P(A_i)]=\prod_{i=1}^{\nu}(1-p_i)$$

β) $B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_\nu=(A_1'A_2'\cdots A_\nu')'=A'$

$$P(B)=P(A')=1-P(A)=1-\prod_{i=1}^{\nu}(1-p_i)$$

Στην Θεωρία Πιθανοτήτων συναντάμε πολλές φορές ανεξάρτητα πειράματα.

Π.χ. Ρίψη νομίσματος ν φορές ισοδυναμεί με ν ανεξάρτητες ρίψεις ενός νομίσματος.

Π.χ. Ρίψη δύο ζαριών ισοδυναμεί με δύο ανεξάρτητες ρίψεις ενός ζαριού.

Π.χ. ν γεννήσεις σε μία οικογένεια: ισοδυναμεί με ν ανεξάρτητες επαναλήψεις (της γέννησης παιδιού)

Τα ενδεχόμενα που αντιστοιχούν σε ανεξάρτητα πειράματα είναι ανεξάρτητα.

Πρόταση: Έστω A, B ξένα ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω.

α) Αν εκτελεστούν ν ανεξάρτητες επαναλήψεις του πειράματος

i) Η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο A σε καθεμία από τις ν επαναλήψεις ισούται με

$$[P(A)]^{\nu}$$

ii) Η πιθανότητα να μην εμφανιστεί το ενδεχόμενο A σε καμμία από τις επαναλήψεις ισούται με

$$[1 - P(A)]^{\nu}$$

β) Αν εκτελούμε συνέχεια επαναλήψεις του πειράματος, η πιθανότητα να εμφανιστεί το ενδεχόμενο A πριν εμφανιστεί το ενδεχόμενο B ισούται με

$$\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

Απόδειξη:

α) i) Έστω A_i : Το ενδεχόμενο A εμφανίζεται κατά την i επανάληψη του πειράματος.

$$\mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(A), \quad i = 1, \dots, \nu$$

$$\mathbb{P}(A_1 A_2 \cdots A_\nu) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\cdots\mathbb{P}(A_\nu) = \underbrace{\mathbb{P}(A)\cdots\mathbb{P}(A)}_{\nu \text{ φορές}} = [\mathbb{P}(A)]^\nu$$

ii) $$\mathbb{P}(A_1' A_2' \cdots A_\nu') = \mathbb{P}(A_1')\mathbb{P}(A_2')\cdots\mathbb{P}(A_\nu') = [1-\mathbb{P}(A)]^\nu$$

β) Έστω B_i : Το ενδεχόμενο B εμφανίζεται στην i επανάληψη, $i = 1, 2, \dots$

$\Gamma_1 = A$

Γ_ν : Το ενδεχόμενο $A \cup B$ δεν εμφανίζεται στις επαναλήψεις $1, \dots, \nu-1$ και στην ν επανάληψη εμφανίζεται το A, $\nu = 2, 3, \dots$

$\mathbb{P}($Το ενδεχόμενο A εμφανίζεται πριν το ενδεχόμενο $B)$

$$= \mathbb{P}\left(\bigcup_{\nu=1}^{\infty} \Gamma_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbb{P}(\Gamma_\nu) = \mathbb{P}(\Gamma_1) + \sum_{\nu=2}^{\infty} \mathbb{P}(\Gamma_\nu)$$

$$= \mathbb{P}(A) + \sum_{\nu=2}^{\infty} [1-\mathbb{P}(A\cup B)]^{\nu-1} \cdot \mathbb{P}(A) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [1-\mathbb{P}(A\cup B)]^{\nu-1} \mathbb{P}(A)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(A)}{1-[1-\mathbb{P}(A\cup B)]} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A\cup B)} \overset{A,B \text{ ξένα}}{=} \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)}$$

πχ Αν ρίχνουμε συνεχώς δύο ζάρια, ποιά είναι η πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα ενδείξεων τουλάχιστον 10 χωρίς να έχει προηγηθεί που περιέχει (έναν τουλάχιστον) άσσο;

Απάντηση:

A: Το άθροισμα των ενδείξεων (σε μία επανάληψη του πειράματος) είναι 10, 11, 12

B: Το αποτέλεσμα της ρίψης των δύο ζαριών (σε μία επανάληψη του πειράματος) περιέχει έναν τουλάχιστο άσσο

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{36} \qquad \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B') = 1 - \frac{5^2}{6^2} = \frac{11}{36}$$

$$\text{Ζητούμενη πιθανότητα} = \frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36}+\frac{11}{36}} = \frac{4}{15}$$

ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

<u>Ορισμός</u>: Έστω Ω δειγματικός χώρος. Μία πραγματική συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>τυχαία μεταβλητή</u> (τ.μ.)

<u>Σημείωση</u>: Στην περίπτωση που ο δειγματικός χώρος είναι συνεχής θα πρέπει γιά κάθε διάστημα $I \subseteq \mathbb{R}$, το σύνολο $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in I\}$ να είναι ενδεχόμενο.

<u>Σημείωση</u>: Τις τ.μ. συνήθως τις συμβολίζουμε με κεφαλαία γράμματα ($X, Y, Z, W, \ldots$).

<u>Πχ</u> Ρίψη νομίσματος τρεις φορές. Έστω

$X = \#$ γραμμάτων στις 3 ρίψεις

$\Omega = \{KKK, KK\Gamma, K\Gamma K, K\Gamma\Gamma, \Gamma KK, \Gamma K\Gamma, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

$X(KKK) = 0, \quad X(KK\Gamma) = 1, \quad X(K\Gamma K) = 1, \ \ldots, \ X(\Gamma\Gamma\Gamma) = 3$

ω	KKK	KKΓ	KΓK	KΓΓ	ΓKK	ΓKΓ	ΓΓK	ΓΓΓ
$X(\omega)$	0	1	1	2	1	2	2	3

$P(X=0) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 0\}) = P(\{KK\Gamma\}) = \frac{1}{8}$

$P(X=1) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = 1\}) = P(\{KK\Gamma, K\Gamma K, \Gamma KK\}) = \frac{3}{8}$

<u>Πχ</u> Πείραμα: Αναζήτηση ταξί. Έστω

$X = \#$ ταξί που περνούν κατειλημμένα (K) μέχρι να βρεθεί το πρώτο ελεύθερο (E).

$\Omega = \{E, KE, KKE, KKKE, \ldots\}$

$X(E) = 0, \quad X(KE) = 1, \quad X(KKE) = 2, \quad X(KKKE) = 3, \ \ldots$

πχ. Ζητάμε από έναν φίλο να μας πει έναν πραγματικό αριθμό στο διάστημα $[0,10]$ και τού δίνουμε σε ευρώ το ποσό που προκύπτει μετά την στρογγυλοποίηση (στον πλησιέστερο ακέραιο $\leq$ του αριθμού) του αριθμού που μας είπε. Έστω:

X = ο αριθμός που διάλεξε ο φίλος

Y = Το ποσό που θα τού δώσουμε.

~~Ορίζουμε~~ Έχουμε δύο τυχαίες μεταβλητές:

$X:[0,10] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad X(\omega)=\omega$

$Y:[0,10] \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad Y(\omega)=[\omega]$ (ακέραιο μέρος του ω)

Το <u>πεδίο τιμών της X</u> ή <u>σύνολο τιμών της X</u>:

$$R_X = \{x \in \mathbb{R} : X(\omega)=x \text{ γιά κάποιο } \omega \in \Omega\}$$

<u>Στο 1ο παράδειγμα</u> (ρίψη νομίσματος 3 φορές) : $R_X = \{0,1,2,3\}$

" 2ο " (αναζήτηση ταξί) : $R_X = \{0,1,2,\dots\}$

" 3ο " (αριθμός, ποσό) : $R_X = \Omega = [0,10]$

$R_Y = \{0,1,\dots,10\}$

πχ. Ρίψη ζαριού δύο φορές

X_1 : ένδειξη 1ου ζαριού, X_2 : ένδειξη 2ου ζαριού

Y : άθροισμα των δύο ενδείξεων

Z : Διαφορά της 1ης ένδειξης από την 2η ένδειξη

W : Η μικρότερη από τις δύο ενδείξεις

$$\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), \dots, (6,6)\}$$

$X_1((4,2)) = 4$, $X_2((4,2)) = 2$, $Y((4,2)) = 6$, $Z((4,2)) = -2$

$W((4,2)) = 2$.

$R_{X_1} = R_{X_2} = R_W = \{1,2,3,4,5,6\}$ $R_Y = \{2, 3, \dots, 12\}$

$R_Z = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$

$Y = X_1 + X_2$ $\quad Z = X_2 - X_1$ $\quad W = \min(X_1, X_2)$

<u>Σημείωση</u>: Έστω X_1, X_2 τ.μ. $X_1 : \Omega \to \mathbb{R}$, $X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$

Οι συναρτήσεις $aX_1 + \beta X_2$ $(a, \beta \in \mathbb{R})$, X_1/X_2 $(X_2 \neq 0)$ και $X_1 \cdot X_2$ είναι τυχαίες μεταβλητές

<u>Σημείωση</u>: $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση $f \circ X : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τ.μ.

<u>πχ.</u> Αν $f(x) = x^3$ τότε X^3 τ.μ.

Έτσι μπορούμε να πάρουμε πιό σύνθετες τ.μ. όπως

$$2\,\eta\mu X_1 + 3\,\sigma\upsilon\nu X_2, \quad \ln X_1 + e^{X_2}, \quad \frac{X_1^2 + X_2^2}{X_1 + \ln X_2}$$

<u>Ορισμός</u>: Η <u>αθροιστική συνάρτηση κατανομής</u> (α.σ.κ.) ή (απλούστερα) <u>συνάρτηση κατανομής</u> της τ.μ. X είναι η συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ με τύπο

$$F(t) = P(X \leq t) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq t\}), \quad t \in \mathbb{R}$$

Ιδιότητες της σ.κ.

α. Αν $t_1 < t_2$ τότε $F(t_1) \leq F(t_2)$, δηλαδή F αύξουσα

β. $\lim_{t\to\infty} F(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} F(t) = 0$

γ. Για κάθε φθίνουσα ακολουθία $\{t_\nu\}_{\nu\geq 1}$ τέτοια ώστε $\lim_{\nu\to\infty} t_\nu = t$ ισχύει $\lim_{\nu\to\infty} F(t_\nu) = F(t)$, δηλαδή F δεξιά συνεχής.

Πρόταση: Αν $a < \beta$ τότε: $P(a < X \leq \beta) = F(\beta) - F(a)$.

Απόδειξη: $(X \leq \beta) = (X \leq a) \cup (a < X \leq \beta)$

$$P(X \leq \beta) = P(X \leq a) + P(a < X \leq \beta) \Rightarrow P(a < X \leq \beta) = F(\beta) - F(a)$$

Σημείωση: $P(X < \beta) = F(\beta-)$ "αριστερό όριο της F στην θέση β"

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a) = 1 - F(a-)$$

$$P(X = a) = P(X \leq a) - P(X < a) = F(a) - F(a-)$$

$$P(a < X < \beta) = F(\beta-) - F(a)$$

$$P(a \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(a-)$$

$$P(a \leq X < \beta) = F(\beta-) - F(a-)$$

Σημείωση: Αν F είναι αριστερά συνεχής τοτε F συνεχής, οπότε $F(a-) = F(a)$. Επομένως:

$$P(X = a) = F(a) - F(a-) = 0 \quad \text{και}$$

$$P(a < X \leq \beta) = P(a < X < \beta) = P(a \leq X \leq \beta) = P(a \leq X < \beta)$$

Σημείωση: Αν η σ.κ. F δεν είναι αριστερά συνεχής στο a τότε εμφανίζεται ένα "άλμα" της συνάρτησης στη θέση a με μέγεθος: $F(a) - F(a-) = P(X = a)$

Π.χ. (μη συνεχής σ.κ.)

X = αριθμός αγοριών μιάς οικογένειας με δύο παιδιά

$\Omega = \{AA, AK, KA, KK\} \quad R_X = \{0,1,2\}$

Ας βρούμε την σ.κ. $F(t)$ της X:

α) για $t<0$: $F(t) = P(X \leq t) = 0$

β) " $0 \leq t < 1$: $F(t) = P(X \leq t) = P(X=0) = P(\{KK\}) = 1/4$

γ) " $1 \leq t < 2$: $F(t) = P(X \leq t) = P(X=0$ ή $X=1)$

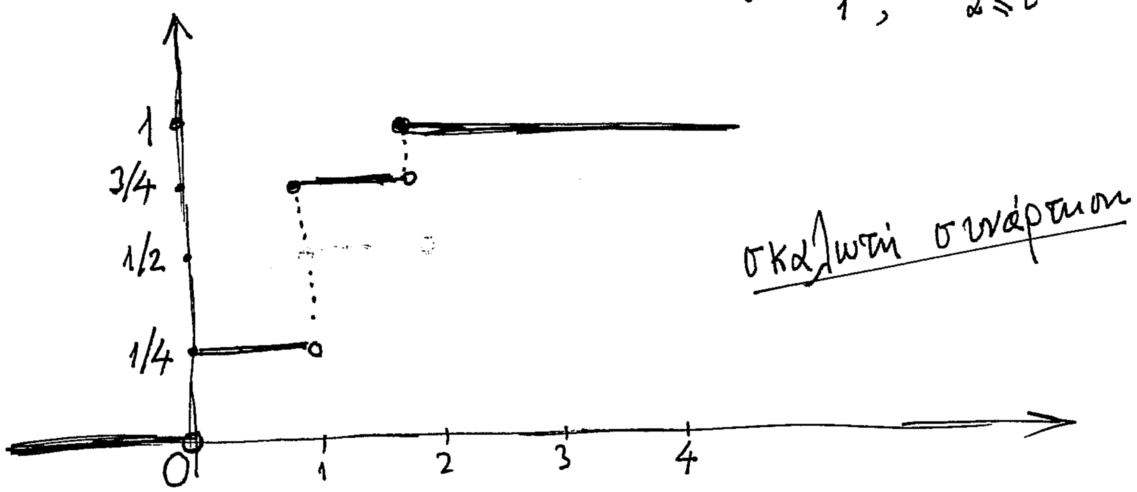
$$= P(X=0) + P(X=1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$$

δ) " $t \geq 2$: $F(t) = P(X \leq t) = P(X=0$ ή $X=1$ ή $X=2)$

$$= P(\Omega) = 1$$

Οπότε:

$$F(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ 1/4, & 0 \leq t < 1 \\ 3/4, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t \end{cases}$$



$$P(X=1) = P(0 < X \leq 1) = F(1) - F(0) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

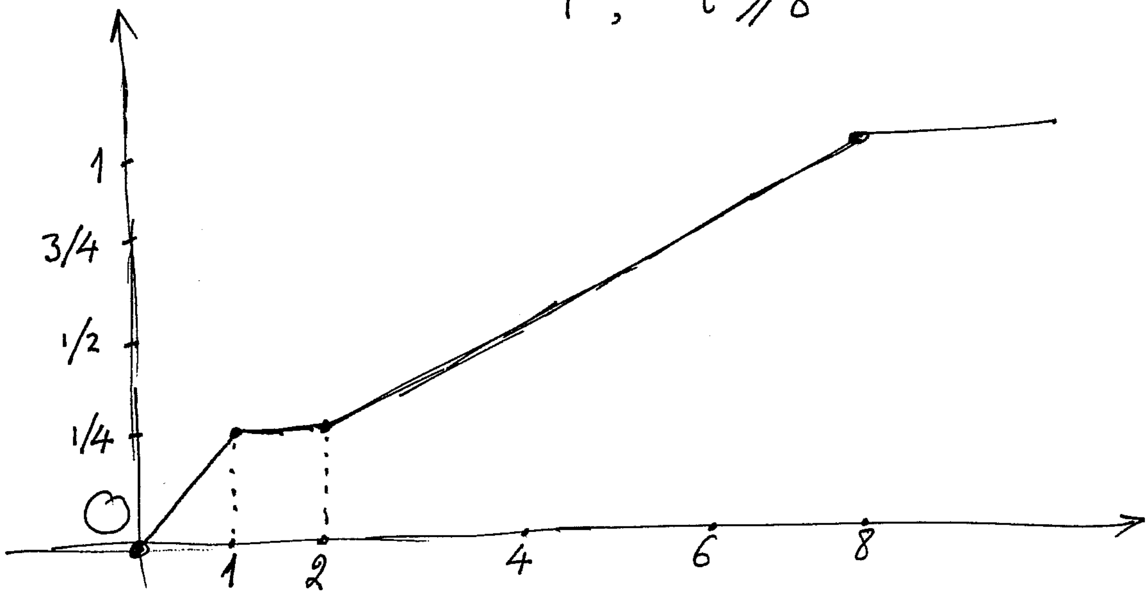
$$P(1 \leq X \leq 2) = P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Πχ Χρόνος αναμονής (σε min) στο ταμείο ενός δημόσιου οργανισμού είναι μια τ.μ. X με σ.κ.

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ t/4, & 0\leq t<1 \\ 1/4, & 1\leq t<2 \\ t/8, & 2\leq t<8 \\ 1, & t\geq 8 \end{cases}$$

είναι συνεχής συνάρτηση



$P(X\leq 3) = F(3) = \frac{3}{8}$

$P(1\leq X\leq 4) = F(4) - F(1-) = F(4) - F(1) = \frac{4}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

$F(1-) = F(1)$ αφού F συνεχής στο 1

$$P(X\leq 5.5 \mid X\geq 2.5) = \frac{P(2.5\leq X\leq 5.5)}{P(X\geq 2.5)} = \frac{F(5.5) - F(2.5)}{1 - F(2.5)} = \frac{\frac{5.5}{8} - \frac{2.5}{8}}{1 - \frac{2.5}{8}} = \frac{5}{11}$$

Σημείωση: Μια πραγματική συνάρτηση F είναι σ.κ. μιας τ.μ. X αν και μόνον αν η F είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής και $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$.