Πεπερασμένοι Δειγματικοί Χώροι με ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα

Έστω δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ με την ιδιότητα

$$P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = \cdots = P(\{\omega_N\}).$$ Τότε

$$1 = P(\Omega) = P(\{\omega_1\} \cup \cdots \cup \{\omega_N\}) = P(\{\omega_1\}) + \cdots + P(\{\omega_N\}) = N P(\{\omega_1\})$$

$$\Rightarrow P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{N}$$

Έστω $A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\} \subseteq \Omega$ ενδεχόμενο

$$P(A) = P(\{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}) = P(\{\omega_{j_1}\} \cup \cdots \cup \{\omega_{j_k}\})$$
$$= P(\{\omega_{j_1}\}) + \cdots + P(\{\omega_{j_k}\}) = \frac{k}{N}$$

Συνεπώς: $$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\text{πλήθος των στοιχείων του } A}{\text{πλήθος των στοιχείων του } \Omega}$$

$$= \frac{\text{πλήθος ευνοϊκών αποτελεσμάτων για το ενδεχόμενο } A}{\text{πλήθος δυνατών αποτελεσμάτων του πειράματος}}$$

"κλασσικός ορισμός της πιθανότητας"
(Laplace - 1812)

Π.χ. Ένα παιδί παίζει με τρεις κύβους που έχουν γράμματα Η, Σ, Τ (σε κάθε κύβο υπάρχει ένα γράμμα).

α) Πόσες και ποιές διαφορετικές λέξεις μπορεί να φτιάξει το παιδί;

$$\Omega = \{ΗΣΤ, ΗΤΣ, ΣΗΤ, ΣΤΗ, ΤΗΣ, ΤΣΗ\}$$

β) i) Ποιά είναι η πιθανότητα η λέξη που θα σχηματιστεί να αρχίζει με Τ;

Απάντηση: Τα έξι απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα

Α: Η λέξη αρχίζει με Τ

$$A = \{ΤΗΣ, ΤΣΗ\}$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ii) Ποιά είναι η πιθανότητα η λέξη που θα σχηματιστεί να έχει νόημα;

Β: Η λέξη που θα σχηματιστεί έχει νόημα

$$B = \{ΤΗΣ, ΣΤΗ\}$$

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

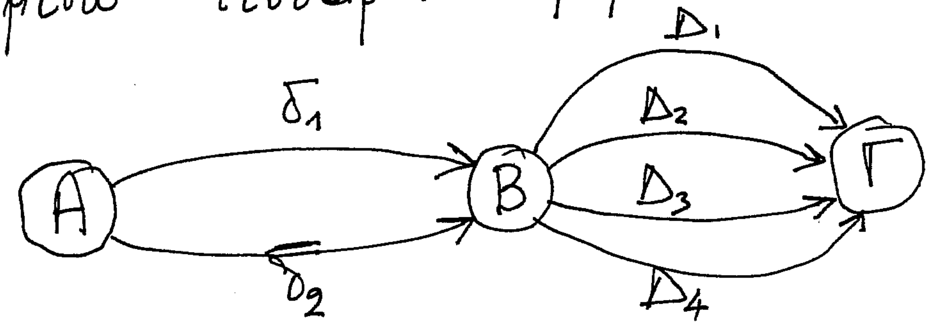
ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Η εύρεση του πλήθους των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου A πολλές φορές <u>δεν</u> είναι εύκολο πρόβλημα.
Η <u>Συνδυαστική Ανάλυση</u> έχει ως αντικείμενο την ανάπτυξη μεθόδων απαρίθμησης

<u>Πολλαπλασιαστική Αρχή</u>:
Αν ένα στοιχείο (αντικείμενο, ενέργεια) a_1 μπορεί να επιλεγεί με ν_1 διαφορετικούς τρόπους, και για κάθε επιλογή του a_1, το στοιχειο a_2 μπορεί να επιλεγεί με ν_2 διαφορετικούς τρόπους, ..., και για κάθε επιλογή των $a_1, \dots, a_{k-1}$ το στοιχείο a_k μπορεί να επιλεγεί με ν_k διαφορετικούς τρόπους τότε τα στοιχεία $a_1, \dots, a_k$ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτήν την σειρά με

$\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_k$ τρόπους.

<u>πχ</u> Μια πόλη Α συνδέεται με την πόλη Β μέσω δύο διαφορετικών δρόμων ενώ η πόλη Β συνδέεται με την πόλη Γ μέσω τεσσάρων δρόμων.



α) Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να ταξιδέψει κάποιος από την πόλη Α προς την πόλη Γ;

$$A \longrightarrow B \text{ ταξιδεύει με } \nu_1 = 2 \text{ τρόπους}$$

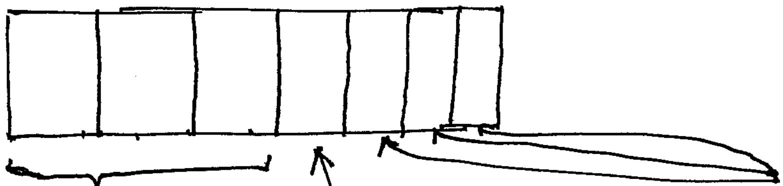
$$B \longrightarrow \Gamma \text{ ταξιδεύει με } \nu_2 = 4 \text{ τρόπους}$$

Συνεπώς από την Α προς την Γ ταξιδεύει με $\nu_1 \nu_2 = 2 * 4 = 8$ τρόπους

β) Ποιά είναι η πιθανότητα επιλογής μιάς συγκεκριμένης διαδρομής;

<u>Απάντηση</u>: Αν υποθέσουμε ότι όλες οι διαδρομές είναι ισοπίθανες τότε η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{1}{8}$

πχ. Αριθμός Πινακίδας Αυτοκινήτου



στις τρείς πρώτες θέσεις υπάρχει κάποιο απο 14 γράμματα

σε αυτήν την θέση υπάρχει κάποιος αριθμός από 1 μέχρι 9

σε αυτές τις τρεις θέσεις υπάρχει κάποιος αριθμός απο 0 μέχρι 9

α) Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας μπορούν να σχηματιστούν ;

Απάντηση: Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε:

$$14 * 14 * 14 * 9 * 10 * 10 * 10 = 14^3 * 9 * 10^3$$
$$= 24.696.000$$

β) Πόσοι διαφορετικοί αριθμοί κυκλοφορίας έχουν τα τρία γράμματα διαφορετικά μεταξύ τους ;

Απάντηση: Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε:

$$14 * 13 * 12 * 9 * 10 * 10 * 10 = 14 * 13 * 12 * 9 * 10^3$$
$$= 19.656.000$$

Ποιά είναι η πιθανότητα μια πινακίδα να έχει τρία γράμματα διαφορετικά μεταξύ τους;

<u>Απάντηση</u>:

A : τρία γράμματα της πινακίδας είναι διαφορετικά μεταξύ τους.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{19.656.000}{24.696.000} \simeq 0,7959$$

Θεωρούμε το σύνολο $X = \{x_1, \dots, x_\nu\}$

<u>Διάταξη</u> των ν <u>στοιχείων ανά k</u> λέγεται κάθε διατεταγμένη k-άδα $(a_1, \dots, a_k)$ με $a_i \in X$, $i = 1, \dots, k$, και $a_i \neq a_j$, $i \neq j$

Αν $k = \nu$ αντί του όρου "διάταξη των ν ανά ν" χρησιμοποιούμε τον όρο <u>μετάθεση</u> των ν στοιχείων.

<u>Συμβολισμός</u>: Το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k συμβολίζεται με $(\nu)_k$

Πρόταση:

α) Το πλήθος των διατάξεων των ν στοιχείων ανά k δίνεται από τον τύπο:

$$(\nu)_k = \nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-k+1), \quad 1\leq k\leq \nu$$

β) Το πλήθος των μεταθέσεων των ν στοιχείων δίνεται από τον τύπο:

$$\nu! = \nu(\nu-1)\cdots 1$$

Απόδειξη:

α) Το πρώτο στοιχείο της διάταξης επιλέγεται με ν τρόπους
" δεύτερο " " " " " $\nu-1$ "
" τρίτο " " " " " $\nu-2$ "
⋮
" k-οστό " " " " " $\nu-(k-1)=\nu-k+1$ "

Οπότε, από την πολλαπλασιαστική αρχή, ο αριθμός των τρόπων για την επιλογή μιάς διατεταγμένης k-άδας ισούται με

$$\nu(\nu-1)\cdots(\nu-(k-1)) = \nu\cdot(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)$$

β) Θέτοντας $k=\nu$ έχουμε

$$(\nu)_\nu = \nu(\nu-1)\cdots 1 = \nu!$$

Π.χ. (Το πρόβλημα γενεθλίων)

Ποιά είναι η πιθανότητα σε μια τάξη k φοιτητών, δύο τουλάχιστον να έχουν γενέθλια την ίδια ημέρα; Θεωρείστε ότι το έτος έχει 365 ημέρες.

Απάντηση: Έστω

A = Κανένας φοιτητής δεν έχει γενέθλια την ίδια μέρα με άλλο φοιτητή.

$$P(A) = \frac{(365)_k}{365^k} = \frac{365 * 364 * \cdots * (365-k+1)}{\underbrace{365 * \cdots * 365}_{k \text{ παράγοντες}}}, \quad 1 \leq k \leq 365$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι:

$$p_k = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{(365)_k}{365^k}, \quad 1 \leq k \leq 365$$

k	2	5	10	25	50	70
p_k	0.003	0.027	0.117	0.565	0.970	0.999

Συνδυασμός ν στοιχείων ανά k

Έστω $X = \{x_1, \ldots, x_\nu\}$ σύνολο $\quad k \leq \nu$

θετικός ακέραιος

Συνδυασμός των ν στοιχείων ανά k είναι μια μη διατεταγμένη συλλογή k διαφορετικών στοιχείων του X.

Το πλήθος των συνδυασμών των ν στοιχείων ανά k το συμβολίζουμε με $\binom{\nu}{k}$. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε

$$\binom{\nu}{k} k! = (\nu)_k$$

$$\Rightarrow \binom{\nu}{k} = \frac{(\nu)_k}{k!} = \frac{\nu(\nu-1)\cdots(\nu-k+1)}{k!} = \frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$$

$$1 \leq k \leq \nu$$

Σημείωση: $\binom{\nu}{0} = 1 \qquad \binom{\nu}{k} = 0, \; k > \nu$

Ιδιότητες συνδυασμών:

α) $\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu-k}$

β) $\binom{\nu}{k} = \binom{\nu-1}{k-1} + \binom{\nu-1}{k}$ "Τρίγωνο του Pascal"

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} \\
\binom{1}{0}\binom{1}{1} \\
\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2} \\
\binom{3}{0}\binom{3}{1}\binom{3}{2}\binom{3}{3} \\
\binom{4}{0}\binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{4}{3}\binom{4}{4} \\
\binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{4}\binom{5}{5} \\
\vdots
\end{array}$$

π.χ. $\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$

<u>π.χ.</u> Σε ένα κατάστημα υπάρχουν 10 τηλεοράσεις και 12 βίντεο γιά επισκευή. Το κατάστημα επισκευάζει μόνο 6 συσκευές ημερησίως. Οι συσκευές προς επισκευή διαλέγονται τυχαία. Ζητούνται:

α) P(να επισκευαστούν 3 τηλεοράσεις και 3 βίντεο)

β) P(να επισκευαστούν το πολύ 4 τηλεοράσεις)

<u>Απάντηση:</u>

α) P(να επισκευαστούν 3 τηλεοράσεις και 3 βίντεο)

$$= \frac{\binom{10}{3}\binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} \simeq 0.3538$$

β) P(να επισκευαστούν το πολύ 4 τηλεοράσεις)

$$= \frac{\binom{12}{6}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{1}\binom{12}{5}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{2}\binom{12}{4}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{3}\binom{12}{3}}{\binom{22}{6}} + \frac{\binom{10}{4}\binom{12}{2}}{\binom{22}{6}}$$

$$= 0.9567$$