Στατιστικός Ορισμός της Πιθανότητας

(Richard von Mises, 1883 - 1953)

Ω: Δειγματικός Χώρος

A: Ενδεχόμενο του Ω

ν_A = # εμφανίσεων του ενδεχόμενου A σε ν επαναλήψεις του πειράματος

$(0 \leq \nu_A \leq \nu)$

Πιθανότητα (εμφάνισης) του ενδεχόμενου A ορίζεται ως το όριο

$$P(A) = \lim_{\nu \to \infty} \frac{\nu_A}{\nu} \longrightarrow f_A$$

f_A : σχετική συχνότητα εμφάνισης του ενδεχόμενου A στις ν επαναλήψεις

"το όριο εδώ δεν έχει αυστηρή μαθηματική σημασία"

Π.χ. Από ελέγχους που έγιναν σε

5000 οχήματα:
- 1000 εξέπεμπαν καυσαέρια πάνω από το νόμιμο όριο
- 800 είχαν φθαρμένα λάστιχα
- 200 δύο παραβάσεις

Έστω τα ενδεχόμενα:

A : Το όχημα εκπέμπει καυσαέρια πάνω από το νόμιμο όριο

B : Το όχημα έχει φθαρμένα λάστιχα

$$f_A = \frac{1000}{5000} = 0.2 \quad f_B = \frac{800}{5000} = 0.16 \quad f_{AB} = \frac{200}{5000} = 0.04$$

Αν υποθέσουμε ότι στις $V = 5000$ επαναλήψεις έχουμε σταθεροποίηση των σχετικών συχνοτήτων:

$$P(A) = 0.2 \qquad P(B) = 0.16 \qquad P(AB) = 0.04$$

Αξιωματικός Ορισμός της Πιθανότητας

Ορισμός: Ω δειγματικός χώρος σε ένα πείραμα Τύχης

Ας θεωρήσουμε ότι σε κάθε ενδεχόμενο A του Ω αντιστοιχείται ένας πραγματικός αριθμός $P(A)$.

Αν:

P1) $P(A) \geq 0$ γιά κάθε ενδεχόμενο A του Ω

P2) $P(\Omega) = 1$

P3) Αν $A_1, A_2, \ldots$ ακολουθία ξένων ανά δύο ενδεχομένων του Ω (δηλαδή $A_i A_j = \emptyset$ γιά $i \neq j$) τότε

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

τότε η συνάρτηση $P(\cdot)$ είναι συνάρτηση πιθανότητας στον δειγματικό χώρο Ω και ο αριθμός $P(A)$ λέγεται πιθανότητα του ενδεχόμενου A

Σημείωση: Οι ιδιότητες P1, P2, P3 είναι γνωστές ως αξιώματα του Kolmogorov. Η ιδιότητα P3 είναι γνωστή ως αξίωμα της σ-προσθετικότητας

Σημείωση: Από το P3 αν θέσουμε

$$A_1 = A_2 = \cdots = \emptyset$$ προκύπτει ότι

$$\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \cdots$$

$$\Rightarrow 0 = \mathbb{P}(\emptyset) + \mathbb{P}(\emptyset) + \cdots$$

$$\xrightarrow[\text{του } \mathbb{P}(\emptyset)]{\text{λόγω μη αρνητικότητας}} \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Σημείωση: Από P3, αν θέσουμε
$A_{\nu+1} = A_{\nu+2} = \cdots = \emptyset$ προκύπτει ότι

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\nu} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{P}(A_i)$$ αν $A_1, \dots, A_\nu$ ξένα ανά δύο ενδεχόμενα

Για $\nu = 2$: $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

αν A, B ξένα ενδεχόμενα.

Πρόταση: Αν $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ τότε

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{a_i\})$$

Απόδειξη: $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{a_1, a_2, \dots\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(\{a_i\})$

Πρόταση: Αν $A = \{a_1, a_2, \dots, a_\nu\}$ τότε

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{\nu} \mathbb{P}(\{a_i\})$$

<u>Πόρισμα</u>: Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ απείρως αριθμήσιμος δειγματικός χώρος.

Έστω $p_i = P(\{\omega_i\})$, $i = 1, 2, \dots$

τότε $$\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

Έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ πεπερασμένος δειγματικός χώρος. Τότε

$$\sum_{i=1}^{N} p_i = 1.$$

<u>Πρόταση</u>: $P(A') = 1 - P(A)$

<u>Απόδειξη</u>: $A \cup A' = \Omega$

$$\Rightarrow P(A \cup A') = P(\Omega)$$
$$\Rightarrow P(A) + P(A') = 1$$
$$\Rightarrow P(A') = 1 - P(A).$$

<u>πχ</u> Η πιθανότητα μη εμφάνισης του A είναι κατά 0.5 μεγαλύτερη της πιθανότητας να εμφανιστεί. $P(A) = ?$

<u>Απάντηση</u>: $P(A') = P(A) + 0.5$

$$1 - P(A) = P(A) + 0.5$$
$$P(A) = 0.25$$

Πχ. $\Omega = \{1, 2, 3, \dots\}$

Η πιθανότητα εμφάνισης του αποτελέσματος $i+1$ είναι το ήμισυ της πιθανότητας εμφάνισης του αποτελέσματος i γιά $i = 1, 2, \dots$ Να υπολογιστούν:

α. Οι πιθανότητες όλων των απλών ενδεχομένων του πειράματος.

β. Η πιθανότητα εμφάνισης άρτιου αποτελέσματος

γ. Η πιθανότητα εμφάνισης περιττού αποτελέσματος

Απάντηση: α) Έστω $p_i = \mathbb{P}(\{i\})$, $i = 1, 2, \dots$

$$p_{i+1} = \frac{1}{2} p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$p_1 + p_2 + \cdots = 1$$

$$p_1 + \frac{1}{2} p_1 + \frac{1}{2^2} p_1 + \cdots = 1$$

$$p_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = 1$$

$$p_1 \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$$

εδώ χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $1 + \omega + \omega^2 + \cdots = \frac{1}{1-\omega}$ αν $|\omega| < 1$

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

Άρα: $p_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i$, $i = 1, 2, \dots$

β) $P(\{2,4,6,\dots\}) = P[\{2\}\cup\{4\}\cup\{6\}\cup\cdots]$

$$= P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) + \cdots$$

$$= p_2 + p_4 + p_6 + \cdots$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}$$

γ) $A = \{2,4,6,\dots\}$

$$P(\{1,3,5,\dots\}) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Διαφορετικά:

$$P(\{1,3,5,\dots\}) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{3}$$

Ιδιότητες της πιθανότητας

Πρόταση: A, B ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω. Τότε:

$$P(A-B) = P(AB') = P(A) - P(AB)$$

Απόδειξη:

$$A - B = AB'$$

$$A = AB \cup AB' \quad \text{ξένα}$$

$$\Rightarrow P(A) = P(AB) + P(AB')$$

$$\Rightarrow P(AB') = P(A) - P(AB)$$

Πόρισμα: Αν $B \subseteq A$ τότε $P(A-B) = P(A) - P(B)$

Πρόταση: α) A, B ενδεχόμενα και $B \subseteq A$, τότε $P(B) \leq P(A)$

β) Αν A ενδεχόμενο τότε $0 \leq P(A) \leq 1$

Απόδειξη:

α) $B \subseteq A \overset{\text{πόρισμα}}{\Rightarrow} P(A-B) = P(A) - P(B) \geq 0$

$\Rightarrow P(B) \leq P(A)$

β) $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega \xrightarrow{\text{α)}} P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(\Omega)$

$\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1.$

Πρόταση: A, B ενδεχόμενα του Ω. Τότε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Απόδειξη:
$$A \cup B = AB' \cup B$$
$$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(AB') + P(B)$$
$$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = P(A) - P(AB) + P(B).$$

Πρόταση:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

Απόδειξη:
$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P[A_1 \cup (A_2 \cup A_3)]$$
$$= P(A_1) + P(A_2 \cup A_3) - P[A_1(A_2 \cup A_3)]$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_2 \cup A_1A_3)$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_2A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

πχ. Έστω τα εξής ενδεχόμενα:

A: Η βαθμολογία ενός υποψηφίου για εισαγωγή σε ΑΕΙ στην έκθεση είναι κάτω από την βάση.

B: Η βαθμολογία ενός υποψηφίου για εισαγωγή σε ΑΕΙ στα μαθηματικά είναι κάτω από την βάση.

$P(A) = 0.2 \quad P(B) = 0.3 \quad P(AB) = 0.1$

Να βρείτε το ποσοστό των υποψηφίων που παίρνει βαθμολογία κάτω από την βάση

α. μόνον στην Έκθεση

β. " στα Μαθηματικά

γ. σε ένα τουλάχιστον από τα δύο μαθήματα

δ. σε ένα ακριβώς " " "

Απάντηση

α. $P(AB') = P(A) - P(AB) = 0.2 - 0.1 = 0.1 \quad (10\%)$

β. $P(A'B) = P(B) - P(AB) = 0.3 - 0.1 = 0.2 \quad (20\%)$

γ. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.2 + 0.3 - 0.1 = 0.4 \quad (40\%)$

δ. $P(AB' \cup A'B) = P(AB') + P(A'B) = 0.1 + 0.2 = 0.3 \quad (30\%)$