Πρόβλημα 1. Έστω f μια μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση και $a \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$f^a(x) := \begin{cases} a & \text{αν } f(x) > a \\ \\ f(x) & \text{αν } f(x) \leq a \end{cases}$$

είναι επίσης μετρήσιμη.

Πρόβλημα 2. Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων. Να δείξετε ότι το σύνολο $E = \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \text{ συγκλίνει}\}$ είναι μετρήσιμο.

Πρόβλημα 3. Έστω f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $(\mathbb{R}, \mathscr{M}, m)$. Αν $\{\Lambda_n\}$ είναι μια ακολουθία μετρήσιμων συνόλων στο $\mathscr{M}$ τέτοιων ώστε $\lim_{n\to\infty} m(\Lambda_n) = 0$ τότε να δείξετε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda_n} f dm = 0.$$

(Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση είναι $\lim_{n\to\infty} \int_{\{|f|>n\}} f dm = 0$.)

Πρόβλημα 4. Αν η f είναι μια μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση και $a, b\ in\mathbb{R}$, $a < b$ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $a \leq f(x) \leq b$ σχεδόν παντού στο $\mathbb{R}$ δείξετε ότι, για κάθε μετρήσιμο σύνολο A με $m(A) < \infty$,

$$am(A) \;\leq\; \int_A f dm \;\leq\; bm(A).$$

Πρόβλημα 5. Να χρησιμοποιήσετε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης ή το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για να υπολογίσετε τα

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+nx^3}\, dx, \qquad \text{και} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\, dx.$$

Πρόβλημα 6. Να εξετάσετε σε ποιές από τις περιπτώσεις η ακολουθία $\{f_n\}$ είναι Cauchy στον $L^2(0\infty)$.

$$a)\;\; f_n(x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{[n,n+1]}(x), \qquad b)\;\; f_n(x) = \mathbf{1}_{(0,n)}(x), \qquad c)\;\; f_n(x) = \frac{1}{x}\mathbf{1}_{(0,n)}(x),$$
$$d)\;\; f_n(x) = \frac{1}{x^2}\mathbf{1}_{(0,n)}(x).$$

Πρόβλημα 7. Να δείξετε ότι $\int_0^\infty e^{-x} dx = 1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$. (Υπόδειξη: Για κάθε $x \geq 0$, η ακολουθία $a_n = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ είναι αύξουσα και συγκλίνει στο e^{-x}.)

Πρόβλημα 8. Έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων και f επίσης ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αν $\int | f_n - f | \to 0$ όταν $n \to \infty$, να δείξετε ότι $\int f_n \to \int f$ και ότι $\int | f_n | \to \int | f |$.

Πρόβλημα 9. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ συγκλίνει η σειρά $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x n^{-\alpha} e^{-nx}$, $x \geq 0$; Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in L^1[0, \infty)$;

Πρόβλημα 10. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

α) Αν η f είναι μετρήσιμη τότε και η $g(x) := f(ax)$ είναι μετρήσιμη για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

β) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $a \neq 0$ τότε και η $g(x) := f(ax)$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = |a| \int g$. (Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.)

γ) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη, να δείξετε ότι $\lim_{a \to \infty} \int f(ax) dx = 0$.

δ) Αν η f είναι μετρήσιμη τότε και η $g(x) := f(x + b)$ είναι μετρήσιμη για κάθε $b \in \mathbb{R}$.

ε) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε και η $g(x) := f(x + b)$ είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = \int g$ για κάθε $b \in \mathbb{R}$. (Υπόδειξη: Δείξτε το πρώτα για ολοκληρώσιμες συναρτήσεις.)

στ) Αν η f είναι ολοκληρώσιμη και $\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(2^n x + n^{-1})$ να δείξετε ότι η ϕ είναι ολοκληρώσιμη και $\int f = \int \phi$.

Πρόβλημα 11. Έστω $p, q, r \in [1, \infty)$ και $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Για κάθε $f \in L_p$ και $g \in L_q$ δείξτε την ακόλουθη γενίκευση της ανισότητας του Hölder:

$$\|fg\|_r = \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

Πρόβλημα 12. Αν $1 \leq p < \infty$ βρείτε δυο συναρτήσεις, $f, g \in L_p(\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε $fg \notin L_p(\mathbb{R})$.