'Ασκηση 4. Μία εταιρία έχει αποφασίσει να χρησιμοποιήσει διαφήμιση γιά την προώθηση των προϊόντων της, χρησιμοποιώντας ένα από τα Μ.Μ.Ε. : ραδιόφωνο, τηλεόραση, τύπο. Το εβδομαδιαίο κόστος διαφήμισης είναι 200, 900, 300 χιλιάδες ευρώ γιά ραδιόφωνο, τηλεόραση, τύπο, αντίστοιχα. Ο εβδομαδιαίος όγκος πωλήσεων ~~είναι~~ κατατάσσεται ως 1 : χαμηλός, 2 : μέτριος, 3 : υψηλός. Οι αντίστοιχες πιθανότητες μετάβασης από κατάσταση σε κατάσταση, ανάλογα με το χρησιμοποιούμενο διαφημιστικό μέσο, δίνονται από τους πίνακες:

(Ραδιόφωνο) (Τηλεόραση) (Τύπος)

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}\end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\end{array} & \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}\end{array}$$

Τα αντίστοιχα εβδομαδιαία κέρδη (σε χιλιάδες Ευρώ), δίνονται από τους πίνακες:

$$\begin{pmatrix} 400 & 520 & 600 \\ 300 & 400 & 700 \\ 200 & 250 & 500 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1000 & 1300 & 1600 \\ 800 & 1000 & 1700 \\ 600 & 700 & 1100 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 400 & 350 & 710 \\ 350 & 450 & 800 \\ 250 & 400 & 650 \end{pmatrix}.$$

Να βρεθεί η βέλτιστη διαφημιστική πολιτική για τις επόμενες τρείς εβδομάδες.

Απάντηση: κατάσταση 1 : χαμηλός όγκος πωλήσεων.
κατάσταση 2 : μέτριος " " ;
κατάσταση 3 : υψηλός " "

Ενέργεια 1 : Χρησιμοποίηση ραδιοφώνου
Ενέργεια 2 : " τηλεοράσεως
Ενέργεια 3 : " τύπου.

$K(a)$ = Εβδομαδιαίο κόστος διαφήμισης (σε 1000-άδες ευρώ) αν επιλεγεί η ενέργεια $a \in \{1,2,3\}$

$$R(i,a) = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}^{(a)} r_{ij}(a) - K(a), \quad i \in \{1,2,3\}, \quad a \in \{1,2,3\}$$

'Εστω: $V(i,t)$, $i=1,2,3$, $t=1,2,3,4$ : Μέγιστο συνολικό αναμενόμενο έσοδο μέχρι την αρχή της 4ης εβδομάδας αν στην αρχή της $t$-οστής εβδομάδας είμαστε στην κατάσταση $i$.

Προφανώς: $V(i,4)=0$, $i=1,2,3$.

Εξίσωση δυναμικού προγραμματισμού:

$$V(i,t) = \max_{a \in \{1,2,3\}} \left[ R(i,a) + \sum_{j=1}^{3} p_{ij}^{(a)} V(j,t+1) \right], \quad \begin{array}{l} i=1,2,3 \\ t=1,2,3 \end{array}$$

Υπολογίζουμε $V(i,t)$ και βρίσκουμε την βέλτιστη ενέργεια, αναδρομικά, γιά $t = 3, 2, 1$.

Άσκηση 6. Μια εταιρία πρόκειται να εισάγει στην αγορά ένα νέο προϊόν. Αν οι πωλήσεις είναι υψηλές τον παρόντα μήνα, θα παραμένουν υψηλές και τον επόμενα μήνα με πιθανότητα 0.5, ενώ αν δεν είναι υψηλές, θα γίνουν υψηλές τον επόμενο μήνα με πιθανότητα 0.2. Η εταιρία μπορεί να βελτιώσει τις μηνιαίες πωλήσεις μέσω διαφημιστικής καμπάνιας και τότε οι προηγούμενες πιθανότητες αυξάνουν σε 0.8 και 0.4, αντίστοιχα.

Αν δεν χρησιμοποιηθεί διαφήμιση και οι πωλήσεις είναι υψηλές, τα μηνιαία έσοδα της εταιρίας (σε εκατομμύρια ευρώ) έχει εκτιμηθεί ότι θα είναι 10 και 4, ανάλογα αν τον επόμενο μήνα οι πωλήσεις παραμείνουν υψηλές ή όχι. Αν όμως οι πωλήσεις είναι χαμηλές, τότε τα αντίστοιχα κέρδη είναι 7 και −2 (ζημία). Με την χρησιμοποίηση της διαφήμισης, οι παραπάνω τέσσερις αριθμοί γίνονται 7, 6 και 3, −5 αντίστοιχα. Να διατυπωθεί το πρόβλημα ως ένα πρόβλημα δυναμικού προγραμματισμού και να γραφεί η αντίστοιχη εξίσωση.

Απάντηση.

κατάσταση 1: υψηλές πωλήσεις

κατάσταση 2: χαμηλές πωλήσεις.

ενέργεια 1: όχι διαφήμιση

ενέργεια 2: διαφήμιση.

$$P(1) = (p_{ij}(1)) = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0.5 & 0.5 \\ 2 & 0.2 & 0.8 \end{array} \qquad P(2) = (p_{ij}(2)) = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0.8 & 0.2 \\ 2 & 0.4 & 0.6 \end{array}$$

$$r_{ij}(1) = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 10 & 4 \\ 2 & 7 & -2 \end{array} \qquad r_{ij}(2) = \begin{array}{c|cc} & 1 & 2 \\ \hline 1 & 7 & 6 \\ 2 & 3 & -5 \end{array}$$

$$R(1,1) = \sum_{j=1}^{2} r_{1j}(1) p_{1j}(1) = 0.5*10 + 0.5*4 = 7$$

$$R(2,1) = \sum_{j=1}^{2} r_{2j}(1) p_{2j}(1) = 0.2*7 + 0.8*(-2) = -0.2$$

$$R(1,2) = \sum_{j=1}^{2} r_{1j}(2) p_{1j}(2) = 0.8*7 + 0.2*6 = 6.8$$

$$R(2,2) = \sum_{j=1}^{2} r_{2j}(2) p_{2j}(2) = 0.4*3 + 0.6*(-5) = -1.8$$

Έστω $V(i,t)$, $i = 0,1$, $t = 1, 2, \dots, n, n+1$ το μέγιστο συνολικό αναμενόμενο κέρδος από την αρχή του μήνα $t$ μέχρι την αρχή του μήνα $n+1$, αν στην αρχή του μήνα $t$ είμαστε στην κατάσταση $i$.

Οι εξισώσεις δυναμικού προγραμματισμού είναι:

$$V(1,t) = \max\{\underbrace{7 + 0.5*V(1,t+1) + 0.5*V(2,t+1)}_{\text{ενέργηα } 1},\ \underbrace{6.8+0.8*V(1,t+1)+0.2*V(2,t+1)}_{\text{ενέργηα } 2}\}$$

$$t=1,\dots,n$$

$$V(2,t) = \max\{\underbrace{-0.2 + 0.2*V(1,t+1)+0.8*V(2,t+1)}_{\text{ενέργηα } 1},\ \underbrace{-1.8+0.4*V(1,t+1)+0.6*V(2,t+1)}_{\text{ενέργηα } 2}\}$$

$$t=1,\dots,n$$

$\cancel{V(1,t)=V(2,}$ $V(1,n+1)=V(2,n+2)=0$

Για να βρούμε τις ποσότητες $V(i,t)$, $i=1,2$, $t=1,\dots,n$ οι υπολογισμοί γίνονται αναδρομικά για $t=n$, $t=n-1,\dots$, $t=1$

Η βέλτιστη ενέργεια είναι εκείνη που μεγιστοποιούν την ποσότητα μέσα στα άγκιστρα.