

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΜΕΧΡΙ ΚΑΙ 2-11-2015

Πραγματοποιήθηκαν τα φυλλάδια 1 και 2 και επιπλέον οι παρακάτω ασκήσεις

Άσκηση 1

Έστω ότι οι A, B, C, D, E είναι πίνακες με τις ακόλουθες διαστάσεις:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ (4 \times 5) & (4 \times 5) & (5 \times 2) & (4 \times 2) & (5 \times 4) \end{array}$$

Να εξεταστεί ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις ορίζονται. Για όσες δεν ορίζονται, εξηγήστε γιατί δεν ορίζονται. Για αυτές που ορίζονται, να βρεθούν οι διαστάσεις του πίνακα που προκύπτει.

$$\begin{array}{llll} \text{(α)} & BA & \text{(β)} & AC + D \quad \text{(γ)} & AE + B \quad \text{(δ)} & AB + B \\ \text{(ε)} & E(A + B) & \text{(στ)} & E(AC) & \text{(ζ)} & E^t A \quad \text{(η)} & (A^t + E)D \end{array}$$

Άσκηση 2

Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων:

$$\gamma) \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1 \\ -\pi & 1/3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -3 & -2 \\ \sqrt{\pi} & 4 \end{bmatrix}, \quad \delta) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} [-1 \ 3 \ 2], \quad \epsilon) [-1 \ 3 \ 2] \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 3

Γράψτε τους 3 επί 3 πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ με στοιχεία $a_{ij} = i + j$ και $b_{ij} = (-1)^{i+j}$.

Άσκηση 4

Να υπολογίσετε το γινόμενο των σύνθετων πινάκων A και B

$$A = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \quad B = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \right]$$

Άσκηση 5

Αν

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array} \right] = [A_1 \ A_2], \quad B = \left[\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ \hline -3 & 7 \\ -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad AB = A_1 B_1 + A_2 B_2 = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ΝΔΟ

Άσκηση 6

Με ποια διάταξη πολλαπλασιάζονται οι πίνακες ως σύνθετοι ;

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 4 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{array} \right]$$

$$B = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Άσκηση 7

Να υπολογίσετε τις δυνάμεις του σύνθετου πίνακα

$$A = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ 1 & -1 & 1 & & & \end{array} \right]$$

Άσκηση 8

1.2.1. Σχεδιάστε την εικόνα των γραμμών για τις δύο εξισώσεις $x + y = 4$, $2x - 2y = 4$ (δύο τεμνόμενες ευθείες) και την εικόνα των στηλών (συνδυασμός των δύο στηλών ισούται με το διάνυσμα στήλη $(4,4)$ στην δεξιά πλευρά).

Άσκηση 9

Σχεδιάστε τις ευθείες

$$u - v = -3$$

$$u + 3v = 1$$

- Βρείτε από το σχήμα τις συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών.
- Αλλάξτε το συντελεστή του u στη δεύτερη εξίσωση, έτσι ώστε οι δύο ευθείες να είναι παράλληλες και διακριτές.
- Αλλάξτε το σταθερό συντελεστή της νέας εξίσωσης έτσι ώστε οι δύο ευθείες να συμπίπτουν.
- Γράψτε το αρχικό σύστημα σε μορφή διανυσματικής εξίσωσης. Σχεδιάστε τα τρία διανύσματα, και επαληθεύσατε ότι οι τιμές του u και v που βρήκατε στο ερώτημα (α) ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμμου για το άθροισμα των διανυσμάτων.

Άσκηση 10

Έστω το σύστημα εξισώσεων:

$$u + v + w = -2$$

$$2u + 2v - w = 5$$

$$u - 3v + 2w = -1$$

- Εφαρμόστε τη διαδικασία απαλοιφής Gauss για να το επιλύσετε.
- Αλλάξτε το συντελεστή του v στην τρίτη εξίσωση, ώστε να πάρετε ένα σύστημα που δεν έχει λύση.
- Αλλάξτε τη σταθερά στο δεξί μέλος της νέας εξίσωσης, έτσι ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

Άσκηση 11

Γράψτε το παρακάτω σύστημα σε μορφή διανυσματικής εξίσωσης.

$$u + v + w = b_1$$

$$u + 2v + 3w = b_2$$

$$v + 2w = b_3$$

Δείξτε ότι τα διανύσματα στο αριστερό μέλος της προκύπτουσας διανυσματικής εξίσωσης είναι συνεπίπεδα, εκφράζοντας το τρίτο διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των δύο άλλων. Ποια μορφή πρέπει να έχει το διάνυσμα (b_1, b_2, b_3) ώστε το σύστημα να έχει λύση; Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα γι' αυτήν την περίπτωση. Είναι αυτή η λύση μοναδική;

Άσκηση 12

1.3.1. Εφαρμόστε απαλοιφή και ανάδρομη αντικατάσταση για να λύσετε το σύστημα

$$2u - 3v = 3$$

$$4u - 5v + w = 7$$

$$2u - v - 3w = 5$$

Ποιοι είναι οι οδηγοί; Καταγράψτε τις τρεις πράξεις κατά τις οποίες ένα πολλαπλάσιο γραμμής αφαιρείται από τις άλλες.

Άσκηση 13

α) Εφαρμόστε στο προηγούμενο σύστημα εξισώσεων την διαδικασία Gauss-Jordan

β) Εφαρμόστε στο προηγούμενο σύστημα εξισώσεων την διαδικασία LU

Άσκηση 14

$$u + v + w = -2$$

1.3.4 Εφαρμόστε απαλοιφή στο σύστημα $3u + 3v - w = 6$. Μόλις εμφανιστεί μηδενικό σε

$$u - v + w = -1$$

οδηγική θέση, αντιμεταθέστε την εξίσωση με την από κάτω της και συνεχίστε. Ποιος συντελεστής του v στην τρίτη εξίσωση, αντί του -1 που υπάρχει τώρα, θα καθιστούσε αδύνατη τη συνέχιση της διαδικασίας και θα ανάγκαζε τη μέθοδο απαλοιφής να αποτύχει;

Άσκηση 15

1.3.5 Λύστε με τη μέθοδο απαλοιφής το σύστημα

$$x - y = 0$$

$$3x + 6y = 18$$

Σχεδιάστε το σχήμα που παριστά κάθε εξίσωση σαν μια ευθεία του επιπέδου x, y : οι ευθείες τέμνονται στη λύση. Προσθέστε επίσης ακόμα μια ευθεία, το γράφημα της νέας δεύτερης εξίσωσης που προκύπτει μετά την απαλοιφή.