22 Συμπληρώματα σε χρήσιμους πίνακες και έννοιες

COMPL1

A. Το ίχνος ενός πίνακα

Από Harville, Matrix Algebra from a Statistician's perspective (Chapter 5, ... ch 21.6)

<u>Ορισμός</u> Έστω A $n\times n$ (τετραγωνικός!) Το ίχνος του A, $tr(A)$ ορίζεται ως το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του A:

$$tr(A) := a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

<u>Συμπ.</u> Άρα $tr(I_n) = n$

<u>Κανόνες:</u> Ισχύουν οι

$$tr(k\,A) = k \cdot tr(A)$$
$$tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$$
$$tr(A^T) = tr(A)$$

<u>Επίσης</u> Αν $A_{m\times n}$ & $B_{n\times m}$ τότε

εξ ορισμού: $tr(A\cdot B) = \langle a^1, b_1\rangle + \langle a^2, b_2\rangle + \dots$
$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}.$$

<u>Πρόταση</u> Αν $A_{m\times n}$ & $B_{n\times m}$ τότε

$$\boxed{tr(AB) = tr(B\cdot A)}$$

<u>Απόδ.</u> $\operatorname{tr}(A\cdot B) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{ji}$

$$\operatorname{tr}(B\cdot A) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} b_{kl}\, a_{lk} \quad \| \checkmark.$$

<u>Πρόταση</u> $\boxed{\operatorname{tr}(A^T\cdot A) = \sum_i \sum_j a_{ij}^2 = \operatorname{tr}(A\cdot A^T)}$

<u>Απόδ.</u> (του πρώτου) Αν a_i η i-στήλη του A τότε το i-διαγώνιο στοιχείο του A^TA είναι το $\|a_i\|^2$

Άρα $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2.$

Η δεύτερη ισότητα έπεται από $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$

Ειδική περίπτωση:

$$A = a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \quad \& \quad B = b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

τότε $\operatorname{tr}(a\cdot b^T) = \operatorname{tr}(b^T a) = b^T a = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i = \langle a, b\rangle.$

$$\operatorname{tr}(a\cdot a^T) = \operatorname{tr}(a^T a) = \sum a_i^2 = \|a\|^2$$

Επίσης έχουμε: $\operatorname{tr}(A\cdot B) = \operatorname{tr}(B^T\cdot A^T)$

$\&'$ $\quad \| \qquad \|$

$$\operatorname{tr}(B\cdot A) = \operatorname{tr}(A^T\cdot B^T)$$

και σε τρεις πίνακες $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{p\times q}$:

$$tr(A\cdot B\cdot C) = tr(C\cdot A\cdot B) = tr(B\cdot C A)$$

(αλλά ΟΧΙ απαραίτητα $= tr(BAC)$!! ακόμα και αν οι διαστάσεις των πινάκων επιτρέπουν νά υπολογίσουμε και το $B\cdot AC$) !

<u>Πρόταση</u> Έστω πίνακας A $n\times n$ με ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (όχι απαραίτητα διαφορετικές μεταξύ τους)

Τότε $\boxed{tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$

<u>Απόδ.</u> (Αν A διαγωνοποιήσιμος) $A = S\Lambda S^{-1}$

$$tr(A) = tr(S\Lambda S^{-1}) = tr(\Lambda \underbrace{S^{-1} S}_{I}) = tr(\Lambda) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

<u>Πρόταση</u> Έστω εκτιμήτρια $\hat{b}$ κάποιας παραμέτρου b, $\hat{b}, b \in \mathbb{R}^n$ με $E\hat{b} = b$ και $Var(\hat{b}) = \Sigma$.

Τότε $E(\hat{b}-b)^T \Sigma^{-1} (\hat{b}-b) = n$.

<u>Απόδ.</u>

$$(\hat{b}-b)^T \Sigma^{-1} (\hat{b}-b) = tr\left[(\hat{b}-b)^T \Sigma^{-1} (\hat{b}-b)\right] = tr\left[\Sigma^{-1} (\hat{b}-b)(\hat{b}-b)^T\right]$$

και $E(\hat{b}-b)^T \Sigma^{-1} (\hat{b}-b) = tr\left[\Sigma^{-1} \cdot E(\hat{b}-b)(\hat{b}-b)^T\right] = tr(\Sigma^{-1}\cdot\Sigma)$

$$= tr\, I_n = n.$$

B. Το Kronecker γινόμενο δύο πινάκων

COMPL4

Harville, Matrix Algebra from a Statistician's perspective, Chapter 16.

<u>Ορισμός</u> Έστω A $m \times n$ και B $p \times q$. Ορίζουμε το Kronecker γινόμενο των A, B τον πίνακα $A \otimes B$, διαστάσεων $m \cdot p \times nq$ ως

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & & a_{1n}B \\ a_{21}B & & & \\ \vdots & & & \\ a_{m1}B & & & a_{mn}B \end{pmatrix}$$

σύνθετος πίνακας με "i,j" σύνθετο" πίνακα τον $a_{ij}B$.

π.χ. αν $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$

τότε

$$A \otimes B = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & & \\ a_{11}b_{31} & a_{11}b_{32} & a_{12}b_{31} & a_{12}b_{32} \\ \hline a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{21}b_{31} & & & \end{array}\right]$$

ενώ

$$B \otimes A = \left[\begin{array}{c|c} b_{11}a_{11} & b_{11}a_{12} \\ b_{11}a_{21} & \vdots \\ \hline b_{21}a_{11} & b_{21}a_{12} \\ \vdots & \\ \hline & \end{array}\right]$$

Κανόνες πράξεων

* $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \lambda \otimes A = A \otimes \lambda = \lambda A$

* $a \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$

• $a \otimes b = \left.\begin{pmatrix} \left.a_1 \cdot b\right\}m \\ \left.a_2 \cdot b\right\}m \\ \vdots \\ \left.a_n \cdot b\right\}m \end{pmatrix}\right\} n \cdot m$

S • $a^T \otimes b^T = \left(a_1 b^T, a_2 b^T, \dots, a_n b^T\right)$

S • $a \otimes b^T = \begin{pmatrix} a_1 b^T \\ a_2 b^T \\ \vdots \\ a_n b^T \end{pmatrix} = a b^T = b^T \otimes a$

* $0 \otimes A = A \otimes 0 = 0$

* $D = diag(d_1, \dots, d_m) \Rightarrow D \otimes A = \begin{pmatrix} d_1 A & 0 & 0 \\ 0 & d_2 A & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$

• $I \otimes A = \begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & A \end{pmatrix}$

• $A \otimes I = \begin{pmatrix} a_{11} I & a_{12} I & \dots \\ a_{21} I & a_{22} I & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$

άρα $I \otimes A \neq A \otimes I$.

COMPL 6

* A, B $m \times n$, C $p \times q$

$$\boxed{\begin{aligned} &\bullet\ (A+B)\otimes C = (A\otimes C) + (B\otimes C) \\ &\bullet\ C\otimes(A+B) = (C\otimes A) + (C\otimes B). \end{aligned}}$$

π.χ. A, B 2×2, C 1×1

$$\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})c & (a_{12}+b_{12})\cdot c \\ (a_{21}+b_{12})\cdot c & (a_{22}+b_{22})\cdot c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\cdot c & a_{12}\cdot c \\ a_{21}\cdot c & a_{22}\cdot c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11}\cdot c & b_{12}c \\ b_{21}c & b_{22}\cdot c \end{bmatrix}.$$

• Άρα και $(A+B)\otimes(C+D) = A\otimes C + A\otimes D + B\otimes C + B\otimes D$

(παίρνω όλα τα δυνατά γινόμενα ...).

* A $m\times n$, B $p\times q$

$$\boxed{(A\otimes B)^T = A^T\otimes B^T}$$

ίδια σειρά!!

προσοχή: όχι $B^T\otimes A^T$.

π.χ. A 2×2

$$(A\otimes B)^T = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{11}B^T & a_{21}B^T \\ a_{12}B^T & a_{22}B^T \end{pmatrix} = A^T\otimes B^T$$

$\Longrightarrow$ αν A, B συμμετρικοί τότε και $A\otimes B$ συμμετρικός

* A $m\times n$, B $p\times q$, C $u\times w$

$$\boxed{A\otimes(B\otimes C) = (A\otimes B)\otimes C.}$$

χωρίς απόδειξη ...

* $A_{m\times n}$, $B_{p\times q}$
$C_{n\times k}$ $D_{q\times v}$

$$\boxed{(A\otimes B)\cdot(C\otimes D) = A\cdot C\otimes B\cdot D}$$

COMPLY

$$C\otimes D = \begin{bmatrix} c_{11}D & c_{12}D \\ c_{21}D & c_{22}D \end{bmatrix}$$

π.χ. A, C 2×2.

$$(A\otimes B)(C\otimes D) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B \\ a_{21}B & a_{22}B \end{bmatrix}}_{A\otimes B}\begin{bmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{bmatrix}$$

$(a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21})B\cdot D$

$$A\cdot C\otimes BD = \begin{bmatrix} \; & \; \\ \; & \; \end{bmatrix}$$

$[AC]_{21}\cdot B\cdot D$

$(a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21})$

✓

Συνέπειες του παραπάνω:

- $A\otimes B = (A\cdot I_n)\otimes(I_p B) = (A\otimes I_p)\cdot(I_n\otimes B)$
- $A\otimes B = (I_m\cdot A)\otimes(B\cdot I_q) = (I_m\otimes B)\cdot(A\otimes I_q)$.
- $(A\otimes b^T)\cdot(d\otimes C) = (Ad)\otimes(b^T C) = Ad\cdot b^T C$
- $(b^T\otimes A)\cdot(C\otimes d) = b^T C\otimes Ad = Ad\cdot b^T C$.

Υπενθ. $\boxed{u\otimes v^T = v^T\otimes u = u\cdot v^T}$

- $(A_1\otimes B_1)\cdot(A_2\otimes B_2)\cdots(A_k\otimes B_k) = (A_1 A_2\cdots A_k)\otimes(B_1 B_2\cdots B_k)$.

$*$ $\boxed{(A\otimes B)^{-1} = A^{-1}\otimes B^{-1}}$ $A_{n\times n}$, $B_{p\times p}$

διότι $(A\otimes B)\cdot(A^{-1}\otimes B^{-1}) = (A\cdot A^{-1})\otimes(BB^{-1}) = I_n\otimes I_p = I_{np}$

$*$ $A_{n\times n}, B_{p\times p}$ $\boxed{tr(A\otimes B) = tr(A)\cdot tr(B)}$

$$tr(A\otimes B) = tr\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{21}B & \cdots \\ a_{12}B & a_{22}B & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix} = a_{11}tr(B) + a_{22}tr(B) + \dots + a_{nn}tr(B)$$

$$= (a_{11}+a_{22}+\dots+a_{nn})\,tr(B) = tr(A)\cdot tr(B)$$

Πρόταση Έστω A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ και B έχει ιδιοτιμές $\mu_1,\dots,\mu_p$. Τότε ο $A\otimes B$ έχει ιδιοτιμές τις $\lambda_i\cdot\mu_j$ $i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,p$.

Απόδειξη (μόνο για διαγωνοποιήσιμους)

Αν $A = S\Lambda S^{-1}$ & $B = TMT^{-1}$

$\Rightarrow S^{-1}AS = \Lambda$ & $T^{-1}BT = M$

$\Rightarrow \Lambda\otimes M = (S^{-1}AS)\otimes(T^{-1}BT) = (S^{-1}\otimes T^{-1})\cdot(A\otimes B)(S\otimes T)$

$= (S\otimes T)^{-1}\cdot(A\otimes B)\cdot(S\times T)$

$\Rightarrow$ $\Lambda\otimes M$ και $A\otimes B$ όμοιοι $\Rightarrow$ έχουν ίδιες ιδιοτιμές

ιδιοτιμές του διαγώνιου $\Lambda\otimes M$ είναι ... τα διαγώνια στοιχεία του $\lambda_i\cdot\mu_j$

Συνέπειες του παραπάνω:

COMPL9

- $\det(A\otimes B) = (\det(A))^p \, [\det(B)]^n$

π.χ. $n=2 \quad p=3$

$$\begin{matrix} \lambda_1\mu_1 & \lambda_2\mu_1 \\ \lambda_1\mu_2 & \lambda_2\mu_2 \\ \lambda_1\mu_3 & \lambda_2\mu_3 \end{matrix} = (\lambda_1\cdot\lambda_2)^3 (\mu_1\cdot\mu_2\cdot\mu_3)^2 = (\det A)^3 (\det B)^2$$

- $\text{τάξη}(A\otimes B) = \text{τάξη}(A) \cdot \text{τάξη}(B)$

Αποδ.

α) (τάξη(C) = $\#\{$ιδιοτιμών $(C) \neq 0\}$ για C συμμετρικό!) επίσης β) $\text{τάξη}(D) = \text{τάξη}(DD^T)$

Έτσι:

$$\text{τάξη}(A\otimes B) = \text{τάξη}\left[(A\otimes B)\cdot(A\otimes B)^T\right]$$

$$= \text{τάξη}\left[(A\otimes B)\cdot(A^T\otimes B^T)\right] =$$

$$= \text{τάξη}\left[(A\cdot A^T)\otimes(B\cdot B^T)\right]$$

ιδιοτιμές $[A\cdot A^T\otimes BB^T]$ είναι οι $\lambda_i\mu_j$ όπου

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ιδιοτιμές AA^T

$\mu_1 \dots \mu_p$ " BB^T

$\Rightarrow \#\{\text{ιδ/μών}[\ ] \neq 0\} = \#\{\lambda_i \neq 0\} \cdot \#\{\mu_j \neq 0\}$

$\Rightarrow \text{τάξη}(A\otimes B) = \text{τάξη}(A) \cdot \text{τάξη}(B)$

Σύνθετοι πίνακες

COMPL10

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{bmatrix} \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}\otimes B & A_{12}\otimes B \\ A_{21}\otimes B & A_{22}\otimes B \\ A_{31}\otimes B & A_{32}\otimes B \end{bmatrix}$$

$m\times n$ $\quad p\times q \quad$ $mp\times nq$

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \qquad a\otimes\left[B_1, B_2, \dots, B_k\right] = \left[a\otimes B_1, \dots, a\otimes B_k\right]$$

Ο Τελεστής "vec": ορισμός & ιδιότητες

$$\mathrm{vec}\Big(\underset{m\times n}{\text{πίνακα}}\Big) = \text{διάνυσμα} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$$

Πως; οι στήλες του η μία κάτω από την άλλη.

αν $A = \left[a_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_n\right]$ $\quad a_i \in \mathbb{R}^m$

τότε
$$\mathrm{vec}(A) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\cdot n}$$

* για ένα $a \in \mathbb{R}^m$

$$\mathrm{vec}(a) = \mathrm{vec}(a^T) = a.$$

* για ένα $a \in \mathbb{R}^m$ και $b \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{vec}(b a^T) = \mathrm{vec}\left(a_1 b \,\middle|\, \dots \,\middle|\, a_m b\right) = a \otimes b$$

* $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad \operatorname{vec}(\lambda \cdot A) = \lambda \cdot \operatorname{vec}(A)$

* $A, B_{m \times n}$ $\quad \operatorname{vec}(A + B) = \operatorname{vec}(A) + \operatorname{vec}(B)$.

* $A_{m \times n}$, $B_{n \times p}$, $B = [\, b_1 | \dots | b_p \,]$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{vec}(A \cdot B) = \operatorname{vec}\Big([\, Ab_1 | \dots | Ab_p \,] \Big) = \begin{pmatrix} Ab_1 \\ Ab_2 \\ \vdots \\ Ab_p \end{pmatrix}$$

Άρα

$$\operatorname{vec}(A \cdot B) = \underbrace{\operatorname{diag}(A, A, \dots, A)}_{\begin{pmatrix} A & & \\ & A & \\ & & A \ddots \end{pmatrix}} \operatorname{vec} B$$

$$= \big[\, I_p \otimes A \,\big] \cdot \operatorname{vec}(B)$$

Πρόταση $A_{m\times n}$, $B_{n\times p}$, $C_{p\times q}$.

$$\Rightarrow \boxed{vec(ABC) = (C^T \otimes A)\, vec(B)}$$

Απόδ

$$B = b_1 e_1^T + \dots + b_p e_p^T \qquad e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\Rightarrow vec(ABC) = vec\left[A \cdot (b_1 e_1^T + \dots + b_p e_p^T)\, C\right]$$

$$= vec\left[A b_1 e_1^T C + \dots + A b_p e_p^T C\right]$$

$\boxed{vec(ba^T) = a \otimes b}$

$$= (C^T e_1) \otimes (A b_1) + \dots + (C^T e_p) \otimes (A b_p)$$

$\boxed{(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD}$

$$= (C^T \otimes A)(e_1 \otimes b_1) + \dots + (C^T \otimes A)(e_p \otimes b_p)$$

$\boxed{vec(ba^T) = a \otimes b}$

$$= (C^T \otimes A)\left[e_1 \otimes b_1 + \dots + e_p \otimes b_p\right]$$

$$= (C^T \otimes A)\, vec\big[\underbrace{b_1 e_1^T + \dots + b_p e_p^T}_{B}\big]$$

$$= (C^T \otimes A)\, vec(B)$$

συνέπειες

$$* \; vec(A \cdot B) = vec(I_m \cdot A \cdot B) = (B^T \otimes I_m)\, vec(A)$$

$$* \; vec(\underset{m\times n}{A} \cdot B) = vec(A \cdot I_n \cdot B) = (B^T \otimes A)\, vec(I_n)$$

$$* \; \text{Από } (ABx) = vec(ABx) = vec(x^T B^T A^T)$$

$$\Rightarrow ABx = (x^T \otimes A)\, vec(B) = (A \otimes x^T)\, vec(B^T)$$

Επίσης έχουμε:

CMPL 13

$$tr(A^T B) = \sum_{j=1}^{n} a_j^T b_j = (a_1^T, a_2^T, \dots, a_n^T)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = vec(A)^T vec(B)$$

Αναδιατύπωση Γραμμικού συστήματος (Harville, 16.5)

Έστω $AX = B$ με αγνώστους X $m\times p$ πίνακα, A $m\times n$, B $m\times p$ & γνωστούς πίνακες αντίστοιχα A, B.

Τότε αυτό αναδιατυπώνεται παίρνοντας vec και στις δύο πλευρές (βλ. & σελίδα CMPL 11) ως:

$$(I_p \otimes A)\, vec(X) = vec(B)$$

$$\iff diag(A, A, \dots, A)\cdot vec(X) = vec(B)$$

Επίσης το σύστημα $AXC = B$ όπου A $m\times n$, $C_{p\times q}$ και $B_{m\times q}$ γνωστοί πίνακες αντίστοιχα & $X_{n\times p}$ άγνωστος αναδιατυπώνεται ως (βλέπε πρόταση σελίδα CMPL12):

$$(C^T \otimes A)\, vec(X) = vec(B)$$