Πρόβλημα 1. 1) Έστω $\{A_n\}$, $\{B_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ δύο ακολουθίες υποσυνόλων του Ω. Να δείξετε ότι $\limsup_{n\to\infty}(A_n \cup B_n) = \limsup_{n\to\infty} A_n \cup \limsup_{n\to\infty} B_n$.

2) Έστω $A, B \subset \Omega$ και

$$A_n = \begin{cases} B & \text{αν } n \text{ περιττός} \\ C & \text{αν } n \text{ άρτιος.} \end{cases}$$

Να εκφράσετε τα $\limsup_{n\to\infty} A_n$ και $\liminf_{n\to\infty} A_n$ ως προς τα B και C.

3) Έστω $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών τέτοιες ώστε $a_n > 0$, $b_n > 1$, για κάθε n και $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 1$. Αν $A_n = \{x \in \mathbb{R} : a_n \le x < b_n\}$ να ευρεθούν τα σύνολα $\limsup_{n\to\infty} A_n$ και $\liminf_{n\to\infty} A_n$.

Πρόβλημα 2. Να δείξετε ότι το σ-πεδίο του Borel στο $\mathbb{R}$ γεννιέται από τα διαστήματα $(-\infty, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, όπου $\{r_n\}$ είναι μια (οποιαδήποτε) απαρρίθμηση των ρητών αριθμών. (Οι ρητοί είναι αριθμήσιμοι επομένως υπάρχει 1-1 αντιστοιχία τους με τους φυσικούς.)

Πρόβλημα 3. Αν $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ είναι χώρος πιθανότητας να δείξετε ότι

$$\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n) \le \liminf_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \le \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) \le \mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n).$$

Πρόβλημα 4. Έστω X μια ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathscr{F}, P)$. Αν $\{\Lambda_n\}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων του $\mathscr{F}$ τέτοιων ώστε $\lim_{n\to\infty} P(\Lambda_n) = 0$ τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Lambda_n} X dP = 0.$$

(Μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση είναι $\lim_{n\to\infty} \int_{\{|X|>n\}} X dP = 0$.)

Πρόβλημα 5. Έστω $X \ge 0$ μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ και $\int_\Omega X dP = m < \infty$. Να δείξετε ότι η συνολοσυνάρτηση $\nu : \mathscr{F} \mapsto \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την σχέση

$$\nu(A) = \frac{1}{m} \int_A X dP, \qquad A \in \mathscr{F}$$

είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathscr{F})$.

Πρόβλημα 6. Να βρείτε δύο παραδείγματα κατανομών στον θετικό ημιάξονα, μιας διακριτής και μιάς συνεχούς, με άπειρη μέση τιμή.

Πρόβλημα 7. Έστω X μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με κατανομή F. Δείξτε ότι αν η X είναι ολοκληρώσιμη (δηλαδή $EX < \infty$) τότε $EX = \int_0^\infty (1 - F(x))dx$. Δείξτε ακόμη ότι η συνθήκη $\lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) = 0$ είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή για να είναι η X ολοκληρώσιμη. (*Υπόδειξη:* θεωρείστε την συνάρτηση κατανομής $F(x) = 0$ αν $x < e$,

$$F(x) = \int_e^x \frac{c}{x(\log x)^2} dx,$$

όπου η σταθερά c έχει επιλεγεί έτσι ώστε $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.)

Πρόβλημα 8. Έστω $\{X_n\}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών. Αν $\sum_{n=1}^\infty P(|X_n| > n) < \infty$ τότε να δείξετε ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} \leq 1, \qquad a.s.$$

Πρόβλημα 9. Έστω $\{X_n\}$ μιά ακολουθία από ανεξάρτητες, μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε ότι αν $A_n = \{\omega : |X_n(\omega) - EX_n| > \epsilon\}$ τότε $P(A_n) \leq \epsilon^{-2} Var(X_n)$. Χρησιμοποιείστε το Λήμμα Borel–Cantelli για να δείξετε ότι η σύγκλιση της σειράς των μέσων $\sum_{n=1}^\infty EX_n < \infty$ και η σύγκλιση της σειράς των διασπορών $\sum_{n=1}^\infty Var(X_n)$ συνεπάγεται την σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^\infty X_n$.

Πρόβλημα 10. Έστω $\{X_n\}$ μιά ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, εκθετικά κατανεμημένες με παράμετρους λ_n, δηλαδή $P(X_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda_n x}$. **α)** Δείξτε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου η σειρά $\sum_{n=1}^\infty X_n$ να συγκλίνει είναι ή 1 ή 0. **β)** Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^\infty X_n$ συγκλίνει με πιθανότητα 1 αν η σειρά των μέσων $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n^{-1}$ συγκλίνει και αποκλίνει με πιθανότητα 1 αν η σειρά των μέσων αποκλίνει.