Θεωρία Πιθανοτήτων Εαρινό Εξάμηνο 2013

Παράδοση: 15-07-13

Πρόβλημα 1. Έστω U, V τυχαίες μεταβλητές από κοινού κανονικά κατανεμημένες με μηδενικό μέσο και πίνακα συνδιακύμανσης

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}.$$

Θέτουμε $X = U + V$, $Y = U - V$. Δείξτε ότι οι X και Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Δείξτε επίσης ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\mathbb{E}[X|V]$ και $\mathbb{E}[Y|V]$ δεν είναι ανεξάρτητες.

Πρόβλημα 2. Έστω X, Y, δύο τυχαίες μεταβλητές και έστω ότι η Y ανήκει στο σ-πεδίο $\sigma(X)$ που γεννάει η X. Αν επιπλέον οι X και Y είναι ανεξάρτητες δείξτε ότι υπάρχει $C \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(Y = C) = 1$. (Δείξτε πρώτα ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(Y \leq y) = 0$ ή 1.)

Πρόβλημα 3. Έστω $\{U_i\}$, $i = 1, 2, \dots$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανεμημένες στο διάστημα [0,2]. Έστω $\mathscr{F}_n = \sigma - \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$. Ορίζουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, ως εξής: $X_0 = 1$ και $X_n = X_{n-1} U_n$, $n = 1, 2, \dots$. Δείξτε ότι η ακολουθία $\{X_n\}$ είναι martingale ως προς την διήθηση $\{F_n\}$.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι η U_i είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[\frac{i}{i+1}, \frac{i+2}{i+1}]$. Δείξτε και πάλι ότι η $\{X_n\}$ είναι martingale. Δείξτε επίσης ότι η ακολουθία $\{X_n\}$ συγκλίνει στον L^2 σε κάποια τυχαία μεταβλητή X.

Πρόβλημα 4. Έστω $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \dots$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Έστω επίσης $\{\xi_n\}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τις τιμές $+1$ και -1 με πιθανότητα 1/2. Αν $X_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \xi_j$ να δείξετε ότι η ακολουθία $\{X_n\}$ είναι Cauchy στον L^2 και επομένως ότι συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή X στον L^2.