ΤΟ ΠΟΛΛΑΠΛΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑ

(Παρουσίαση του γραμμικού υποδείγματος με γραμμική άλγεβρα και από κοινού έλεγχοι υποθέσεων – Κεφ. 3, Κεφ. 4 (112-132))

$$y_i = \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \ldots + \beta_K x_{iK} + \varepsilon_i, \quad i=1,2,\ldots,N \qquad (1)$$

A. Παρουσίαση του απλού γραμμικού υποδείγματος με γραμμική άλγεβρα

Για όλες τις μονάδες (παρατηρήσεις i) αυτό γράφεται ως το ακόλουθο σύστημα N-εξισώσεων:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \beta_1 + x_1\beta_2 + \varepsilon_1 \\
y_2 &= \beta_1 + x_2\beta_2 + \varepsilon_2 \\
y_3 &= \beta_1 + x_3\beta_2 + \varepsilon_3 \\
&\vdots \qquad \vdots \\
y_N &= \beta_1 + x_N\beta_2 + \varepsilon_N,
\end{aligned}
$$

ή χρησιμοποιώντας ορισμούς διανυσμάτων και μητρών (πινάκων) ως

$$
\underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}} = \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}} \beta_1 + \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}} \beta_2 + \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}} = \underset{(NX2)}{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}} \underset{(2X1)}{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}} + \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}},
$$

ή πιο συνοπτικά ως

$$
\begin{aligned}
\underset{(NX1)}{\mathbf{y}} &= \underset{(NX1)}{\mathbf{1}}\beta_1 + \underset{(NX1)}{\mathbf{x}}\beta_2 + \underset{(NX1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \\
&= \underset{(NX2)}{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x} \end{bmatrix}} \underset{(2X1)}{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}} + \underset{(NX1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{(NX2)}{\mathbf{X}}\,\underset{(2X1)}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{(NX1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad \text{όπου}
\end{aligned}
$$

$$
\underset{(NX1)}{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}, \quad \underset{(NX1)}{\mathbf{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underset{(NX1)}{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \underset{(NX2)}{\mathbf{X}} = \underset{(NX2)}{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x} \end{bmatrix}} = \underset{(NX2)}{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix}}, \quad \underset{(2X1)}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}, \quad \underset{(NX1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}.
$$

<u>Οι κλασικές υποθέσεις του διαταρακτικού όρου</u> ε_i

$$E(\varepsilon_i) = 0,\ \forall\, i \quad \text{και} \quad E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = \begin{cases} \sigma^2, & \forall\, i = j \\ 0, & \forall\, i \neq j \end{cases}$$

για όλες τις παρατηρήσεις γράφονται ως

<u>(i) για τη μέση τιμή:</u>

$$\begin{matrix} E(\varepsilon_1) = 0 \\ E(\varepsilon_2) = 0 \\ E(\varepsilon_3) = 0 \\ \vdots \\ E(\varepsilon_N) = 0, \end{matrix} \quad \text{ή} \quad \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1) \\ E(\varepsilon_2) \\ E(\varepsilon_3) \\ \vdots \\ E(\varepsilon_N) \end{bmatrix} = \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \quad \text{ή} \quad E\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} = \underset{(NX1)}{E(\boldsymbol{\varepsilon})} = \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}} \equiv \underset{(NX1)}{\mathbf{0}},$$

<u>(ii) για τη διακύμανση (μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης):</u>

$$Var(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv E(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = E\left(\underset{(NX1)}{\boldsymbol{\varepsilon}}\ \underset{(1XN)}{\boldsymbol{\varepsilon}'}\right) = E\left\{ \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix}} \underset{(1XN)}{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \cdots & \varepsilon_N \end{bmatrix}} \right\}$$

$$= \underset{(NXN)}{\begin{bmatrix} E(\varepsilon_1^2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_2) & E(\varepsilon_1\varepsilon_3) & .. & E(\varepsilon_1\varepsilon_N) \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1) & E(\varepsilon_2^2) & E(\varepsilon_2\varepsilon_3) & .. & E(\varepsilon_2\varepsilon_N) \\ E(\varepsilon_3\varepsilon_1) & E(\varepsilon_3\varepsilon_2) & E(\varepsilon_3^2) & .. & E(\varepsilon_3\varepsilon_N) \\ : & : & : & : & : \\ E(\varepsilon_N\varepsilon_1) & E(\varepsilon_N\varepsilon_2) & E(\varepsilon_N\varepsilon_3) & .. & E(\varepsilon_N^2) \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \underset{(NXN)}{\mathbf{I}}$$

<u>Οι ιδιότητες των παρατηρήσεων της εξαρτημένης μεταβλητής</u> y_i:

(i) <u>για τη μέση τιμή</u>

$$\mathrm{E}(\mathbf{y}) = \mathrm{E}(\mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{E}(\mathbf{X\beta}) + \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{X\beta}, \qquad \text{καθώς } \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}.$$

όπου

$$\mathrm{E}(\mathbf{y}) = \mathbf{X\beta} \;\Rightarrow\; \mathrm{E}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}.$$

(ii) <u>για τη διακύμανση (μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης)</u>:

$$\underset{(NXN)}{\mathrm{Var}(\mathbf{y})} \overset{\text{ορισμός}}{\equiv} \mathrm{E}\left\{\left[\underset{(NX1)}{\mathbf{y}} - \underset{(NX1)}{\mathrm{E}(\mathbf{y})}\right]\left[\mathbf{y} - \mathrm{E}(\mathbf{y})\right]'\right\}$$

$$= \mathrm{E}\left\{\underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} y_1 - \mathrm{E}(y_1) \\ y_2 - \mathrm{E}(y_2) \\ y_3 - \mathrm{E}(y_3) \\ \vdots \\ y_N - \mathrm{E}(y_N) \end{bmatrix}} \underset{(1XN)}{\begin{bmatrix} y_1 - \mathrm{E}(y_1) & y_2 - \mathrm{E}(y_2) & y_3 - \mathrm{E}(y_3) & \cdots & y_N - \mathrm{E}(y_N) \end{bmatrix}}\right\}$$

$$= \mathrm{E}\begin{bmatrix} [y_1 - \mathrm{E}(y_1)]^2 & [y_1 - \mathrm{E}(y_1)][y_2 - \mathrm{E}(y_2)] & .. & [y_1 - \mathrm{E}(y_1)][y_N - \mathrm{E}(y_N)] \\ [y_2 - \mathrm{E}(y_2)][y_1 - \mathrm{E}(y_1)] & [y_2 - \mathrm{E}(y_2)]^2 & .. & [y_2 - \mathrm{E}(y_2)][y_N - \mathrm{E}(y_N)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ [y_N - \mathrm{E}(y_N)][y_1 - \mathrm{E}(y_1)] & [y_N - \mathrm{E}(y_N)][y_2 - \mathrm{E}(y_2)] & .. & [y_N - \mathrm{E}(y_N)]^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(y_1) & \mathrm{Cov}(y_1, y_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(y_1, y_N) \\ \mathrm{Cov}(y_2, y_1) & \mathrm{Var}(y_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(y_2, y_N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(y_N, y_1) & \mathrm{Cov}(y_N, y_2) & \ldots & \mathrm{var}(y_N) \end{bmatrix}$$

Λύση: $\mathrm{Var}(\mathbf{y}) \equiv \mathrm{E}\left\{[\mathbf{y} - \mathrm{E}(\mathbf{y})][\mathbf{y} - \mathrm{E}(\mathbf{y})]'\right\} = \mathrm{E}\left\{(\mathbf{y}\text{-}\mathbf{X\beta})(\mathbf{y}\text{-}\mathbf{X\beta})'\right\} = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon\varepsilon}') = \sigma^2\mathbf{I}$.

Β. Ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων με γραμμική άλγεβρα

(i) Για το απλό γραμμικό υπόδειγμα: Για την παρουσίαση των εκτιμητών $\hat{\beta}_1$ και $\hat{\beta}_2$ του απλού υποδείγματος, γράψτε τις κανονικές εξισώσεις

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} y_i &= N\hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i &= \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{N} x_i + \hat{\beta}_2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{aligned}\right\}$$

ως

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} y_i x_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

και παρατηρήστε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

α)
$$\underset{(2XN)(NX2)}{\mathbf{X}'\ \mathbf{X}} = \underset{(2XN)}{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x} \end{bmatrix}'} \underset{(NX2)}{\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x} \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}' \\ \mathbf{x}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{x} \end{bmatrix} =$$

$$= \underset{(2XN)}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & .. & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & .. & x_N \end{bmatrix}} \underset{(NX2)}{\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ : & : \\ 1 & x_N \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}'\mathbf{1} & \mathbf{1}'\mathbf{x} \\ \mathbf{x}'\mathbf{1} & \mathbf{x}'\mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

Η μήτρα $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ αυτή μπορεί επίσης να γραφεί και σε μορφή αθροισμάτων των μητρών $\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i'$ ως εξής:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} 1 & x_i \\ x_i & x_i^2 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_i \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i'$$

όπου $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \end{bmatrix}$.

$$\textbf{(β)}\qquad \underset{(2XN)(NX1)}{\mathbf{X}'\ \mathbf{y}} = [\mathbf{1}\quad \mathbf{x}]'\,\mathbf{y} = \begin{bmatrix}\mathbf{1}'\\ \mathbf{x}'\end{bmatrix}\mathbf{y} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ \vdots\\ y_N\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N} y_i\\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i\end{bmatrix}.$$

Το διάνυσμα $\mathbf{X}'\mathbf{y}$ μπορεί επίσης να γραφεί και ως το άθροισμα των γινομένων του διανύσματος $\mathbf{x}_i = \begin{bmatrix}1\\ x_i\end{bmatrix}$ με την εξαρτημένη μεταβλητή y_i:

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{N} y_i\\ \sum_{i=1}^{N} x_i y_i\end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix}1\\ x_i\end{bmatrix} y_i = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i y_i$$

Ααντικαθιστώντας τις παραπάνω αναλυτικές μορφές της μήτρας **X'X** και του διανύσματος **X'y** στο σύστημα των κανονικών εξισώσεων έχουμε:

$$\underset{(2X1)}{\mathbf{X}'\mathbf{y}} = \underset{(2X2)}{(\mathbf{X}'\mathbf{X})}\ \underset{(2X1)}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \tag{4α}$$

ή

$$\underset{(2X1)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i' y_i\right)} = \underset{(2X2)}{\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i'\right)}\underset{(2X1)}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} \tag{4β}$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hat{\beta}_2\end{bmatrix}$ αναφέρεται ως ο LS εκτιμητής του **β**.

Λύνοντας (4α) και (4β) ως προς $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ συνεπάγεται:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad\Rightarrow\quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{y}), \tag{5α}$$

ή

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i y_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i'\right)\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad\Rightarrow\quad \hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i'\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i y_i\right). \tag{5β}$$

Γ. Το πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + ... + \beta_K x_{iK} + \varepsilon_i$$

γράφεται με τη βοήθεια της γραμμικής άλγεβρας για όλες τις παρατηρήσεις του δείγματος i ως εξής:

$$\underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ : \\ y_N \end{bmatrix}} = \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ : \\ 1 \end{bmatrix}} \beta_1 + \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \\ : \\ x_{N2} \end{bmatrix}} \beta_2 + \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{34} \\ : \\ x_{N4} \end{bmatrix}} \beta_3 ... + \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} x_{1K} \\ x_{2K} \\ x_{3K} \\ : \\ x_{NK} \end{bmatrix}} \beta_K + \underset{(NX1)}{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ : \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix}},$$

ή ως

$$\underset{(NX1)}{\mathbf{y}} = \underset{(NX1)}{\mathbf{1}} \beta_1 + \underset{(NX1)}{\mathbf{x}_2} \beta_2 + \underset{(NX1)}{\mathbf{x}_3} \beta_3 + ... \underset{(NX1)}{\mathbf{x}_K} \beta_K + \underset{(NX1)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_{N2} & \cdots & x_{NK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \boldsymbol{\varepsilon} = \underset{(NXK)}{\mathbf{X}} \underset{(KX1)}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{(NX1)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Εκτίμηση των συντελεστών του υποδείγματος με τη μέθοδο LS

<u>Πρόβλημα</u>: Εύρεση του εκτιμητή LS $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων $\sum_{i=1}^{N} \hat{\varepsilon}_i^2$, που γράφεται ως

$$\sum_{i=1}^{N} \hat{\varepsilon}_i^2 = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 & \hat{\varepsilon}_2 & \cdots & \hat{\varepsilon}_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_N \end{bmatrix} = \underset{(1XN)}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'} \underset{(NX1)}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} .$$

Δηλ.

$$\underset{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\text{ελαχ}} \; \underset{(1X1)}{\text{RSS}(\hat{\boldsymbol{\beta}})} \equiv \underset{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\text{ελαχ}} \; \underset{(1XN)}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'} \underset{(NX1)}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}} \;=\; \underset{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\text{ελαχ}} \; (\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'(\mathbf{y}-\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})$$

ή, κάνοντας πράξεις,

$$\begin{aligned}\underset{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\text{ελαχ}} \, \underset{(1X1)}{\text{RSS}(\hat{\boldsymbol{\beta}})} &= \underset{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\text{ελαχ}} \; (\mathbf{y}'\mathbf{y}-\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}-\mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}+\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &= \underset{\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\text{ελαχ}} \; (\mathbf{y}'\mathbf{y}-2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}+\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}),\end{aligned} \tag{7}$$

καθώς $\underset{(1X1)}{\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}} = \underset{(1X1)}{(\mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})'}$.

<u>**Λύση**</u>: Συνθήκη πρώτης τάξης (foc): [1]

$$\text{foc}: \qquad \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}}(\mathbf{y}'\mathbf{y}-2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}+\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \underset{(\mathbf{KX1})}{\mathbf{0}} \tag{8}$$

ή

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}}(\mathbf{y}'\mathbf{y}-2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y}+\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \;&=\; \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}}(\mathbf{y}'\mathbf{y})-2\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y})+\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}}(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \\ &=\; \mathbf{0}-2\mathbf{X}'\mathbf{y}+2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{9}$$

ή

$$\mathbf{X}'\mathbf{y}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad \Rightarrow \quad \hat{\boldsymbol{\beta}}=(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \tag{10}$$

Αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη και μοναδικότητα της παραπάνω λύσης του εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ *είναι η (KXK)-διάστασης μήτρα των σταυροειδών γινομένων* $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ *να είναι αντιστρέψιμη, δηλ. να ισχύει:*

$$rank(\mathbf{X}'\mathbf{X})=\text{K} \quad \textit{(που σημαίνει } |\mathbf{X}'\mathbf{X}| \neq 0\textit{)}$$

[1] Τα αποτελέσματα διαφορικού λογισμού για γραμμικούς συνδυασμούς και τετραγωνικές μορφές που χρησιμοποιούμε για την απόδειξη της σχέσης (9) είναι:

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}}\underset{(1X1)}{(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\boldsymbol{\alpha})} = \underset{(KX1)}{\boldsymbol{\alpha}} \quad (\text{όπου } \boldsymbol{\alpha}=\mathbf{X}'\mathbf{y}) \;\; \text{και} \quad \frac{\partial}{\partial \hat{\boldsymbol{\beta}}}\underset{(1X1)}{(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}})} = \underset{(KX1)}{2\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}}},$$

όπου $\mathbf{A}=\mathbf{X}'\mathbf{X}$ αποτελεί συμμετρική μήτρα, δηλαδή η ανάστροφή της δίνει την ίδια τη μήτρα.

*ή οι στήλες της μήτρας των παρατηρήσεων των ανεξάρτητων μεταβλητών **X** είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Διαφορετικά, θα έχουμε το πρόβλημα της πολυσυγγραμμικότητας (multicolinearity).*

Μια εναλλακτική μορφή της λύσης του εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ είναι η ακόλουθη:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i'\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i y_i\right), \qquad \text{όπου} \quad \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iK} \end{bmatrix},$$

όπου

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i' = \sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix} 1 \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iK} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & x_{i2} & \dots & x_{iK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_{iK} \\ \sum_{i=1}^{N} x_{i2} & \sum_{i=1}^{N} x_{i2}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_{i2}x_{iK} \\ \cdots & & \cdots & \\ \sum_{i=1}^{N} x_{iK} & \sum_{i=1}^{N} x_{iK}x_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{N} x_{iK}^2 \end{bmatrix},$$

και

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i y_i = \sum_{i=1}^{N}\begin{bmatrix} 1 \\ x_{i2} \\ \vdots \\ x_{iK} \end{bmatrix} y_i = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_{i2}y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{N} x_{iK}y_i \end{bmatrix}.$$

Συνθήκες δεύτερης τάξης (για ελάχιστο σημείο):

$$\text{soc}: \quad \frac{\partial^2}{\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}'\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{\partial}{\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}'}\left[\frac{\partial}{\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}}(\mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}})\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial\hat{\boldsymbol{\beta}}'}\left[-2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}\right] = 2(\mathbf{X}'\mathbf{X}).$$

Είναι η μήτρα $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ να είναι θετικά ορισμένη?

Αποδ. Αρκεί η τετραγωνική της μορφή

$$\mathbf{d}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{d} > 0 \text{ (θετικά ορισμένη)},$$

όπου **d** είναι ένα οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα στήλης (ΚΧ1). Αυτό αποδεικνύεται εύκολα γράφοντας $\mathbf{d}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{d}$ ως

$$\mathbf{d}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\mathbf{d} = \mathbf{d}'\mathbf{X}'\mathbf{X}\mathbf{d} = (\mathbf{X}\mathbf{d})'\mathbf{X}\mathbf{d} = \boldsymbol{\delta}'\boldsymbol{\delta} = \sum_{i=1}^{K}\delta_i^{\,2} > 0, \qquad \text{όπου } \underset{(KX1)}{\boldsymbol{\delta}} \equiv \mathbf{X}\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_K \end{pmatrix}.$$

Οι ιδιότητες των καταλοίπων

<u>Ορθογωνιότητα</u>:

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \underset{(KX1)}{\mathbf{0}}$$

(το άθροισμα των καταλοίπων = μηδέν αποτελεί περίπτωση της παραπάνω υπόθεσης), δηλ.

$$\mathbf{1}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_N \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{N} \hat{\varepsilon}_i = 0$$

Στατιστικές ιδιότητες του LS εκτιμητή

(i) Γραμμικότητα: $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \underset{(KXN)}{\mathbf{C}}\ \underset{(NX1)}{\mathbf{y}}$,

όπου

$\underset{(KXN)}{\mathbf{C}} = \underset{(KXK)}{(\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}}\ \underset{(kXN)}{\mathbf{X}'}$ είναι μια μήτρα διαστάσεων (ΚΧΝ) με προκαθορισμένες τιμές.

(ii) Αμεροληψία: $\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$

Αποδ. Γράψτε τον εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$ ως

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\beta}} &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}\right) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \\ &= \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (11)\end{aligned}$$

Παίρνοντας την αναμενόμενη τιμή συνεπάγεται

$$\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathrm{E}\left[\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right] = \boldsymbol{\beta} + \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right] = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) \; = \; \boldsymbol{\beta},$$

καθώς Ε($\boldsymbol{\varepsilon}$)=**0** και Ε(**X**)=**X**.

(iii) Αποτελεσματικότητα: Πρώτα βρέστε τη διακύμανση (μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης) του LS εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ως

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &\overset{\text{ορισμός}}{\equiv} \mathrm{E}\left[\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)\left(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right)'\right] \\ &= \mathrm{E}\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\right], \qquad \text{λόγω της ιδιότητας της αμεροληψίας } \mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \beta, \\ &= \mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1 - \beta_1 \\ \hat{\beta}_2 - \beta_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_K - \beta_K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1 - \beta_1 & \hat{\beta}_2 - \beta_2 & \ldots & \hat{\beta}_K - \beta_K\end{bmatrix}\right\} \\ &= \begin{bmatrix}\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2) & \ldots & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_K) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_1) & \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) & \cdots & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_K) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_K,\hat{\beta}_1) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_K,\hat{\beta}_2) & \ldots & \mathrm{Var}(\hat{\beta}_K)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Η μήτρα αυτή βρίσκεται ως

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathrm{E}\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta})'\right] = \mathrm{E}\left[\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right)\left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\right)'\right], \text{ καθώς } \hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}.$$

$$= \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right], \text{ καθώς } \left((\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right)' = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \text{ - συμμετρική η } (\mathbf{X}'\mathbf{X})$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}, \qquad \text{καθώς } \mathrm{E}(\mathbf{X})=\mathbf{X}$$

$$= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}, \qquad \text{καθώς } \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \sigma^2\mathbf{I},$$

$$= \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \tag{12}$$

Απόδειξη θεωρήματος Gauss-Markov: $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) \geq \mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})$, για οποιοδήποτε γραμμικό και αμερόληπτο εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}^*$.

Έστω $\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \mathbf{D}\mathbf{y}$, όπου $\mathbf{D}= \mathbf{A} + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$

Για να είναι αμερόληπτος ο εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \mathbf{D}\mathbf{y}$ θα πρέπει να ισχύει:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) &= \mathrm{E}\left[\mathbf{D}\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{A}+\mathbf{C}\right)\left(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\varepsilon}\right)\right] = \mathrm{E}\left(\mathbf{A}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{C}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}+\mathbf{A}\boldsymbol{\varepsilon}+\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}\right) \\
&= \mathbf{A}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{X})\boldsymbol{\beta} + \mathbf{A}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mathbf{C}\,\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\
&= \mathbf{A}\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} \;= \boldsymbol{\beta},
\end{aligned}$$

η οποία ικανοποιείται αν και μόνον αν ισχύει η συνθήκη:

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{0},$$

καθώς $\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$.

Η διακύμανση του εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}^* = \mathbf{D}\mathbf{y}$ βρίσκεται ως

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*) &= \mathrm{E}\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}^*-\boldsymbol{\beta})'\right] \\
&= \mathrm{E}\left\{\left[\left(\mathbf{A}+\mathbf{C}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right]\left[\left(\mathbf{A}+\mathbf{C}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\right]'\right\}, \qquad \text{καθώς } \hat{\boldsymbol{\beta}}^* - \boldsymbol{\beta} = (\mathbf{A}+\mathbf{C})\boldsymbol{\varepsilon} \text{ λόγω } \mathbf{A}\mathbf{X}=\mathbf{0}, \\
&= \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{A}+\mathbf{C}\right)\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\left(\mathbf{A}'+\mathbf{C}'\right)\right] \;= \sigma^2\left(\mathbf{A}+\mathbf{C}\right)\left(\mathbf{A}'+\mathbf{C}'\right)
\end{aligned}$$

$$= \sigma^2 \left(\mathbf{AA}' + \mathbf{AC}' + \mathbf{CA}' + \mathbf{CC}' \right)$$

$$= \sigma^2 \left(\mathbf{AA}' + \mathbf{CC}' \right), \qquad \text{καθώς } \mathbf{AC}' = \mathbf{CA}' = \mathbf{0} \text{ λόγω } \mathbf{AX} = \mathbf{0},$$

$$= \sigma^2 \left[\mathbf{AA}' + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \right], \qquad \text{χρησιμοποιώντας } \mathbf{C} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$$

$$= \sigma^2 \left[\mathbf{AA}' + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \right] \; = \sigma^2 \left(\mathbf{AA}' \right) + \sigma^2 \left(\mathbf{X}'\mathbf{X} \right)^{-1}$$

$$= \sigma^2 (\mathbf{AA}') + \mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}), \qquad \text{όπου } \mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \text{ είναι η διακύμανση του } \hat{\boldsymbol{\beta}}$$

$$\geq \mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}),$$

καθώς η μήτρα $\mathbf{AA}'$ είναι πάντα θετικά-ημιορισμένη (positive semidefinite)

<u>Παράδειγμα εύρεσης της διακύμανσης του LS εκτιμητή</u> $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ βάση του τύπου: $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$. Η διακύμανση του εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix}$ για το απλό υπόδειγμα $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ είναι:

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) \equiv \mathrm{Var}\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \sigma^2 \left(\mathbf{X}'\mathbf{X} \right)^{-1} = \sigma^2 \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i \right)^2} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & -\sum_{i=1}^{N} x_i \\ -\sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{bmatrix}$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{N\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - N\overline{x}^2 \right)} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & -\sum_{i=1}^{N} x_i \\ -\sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2} & -\dfrac{\sigma^2 \overline{x}}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2} \\ -\dfrac{\sigma^2 \overline{x}}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2} & \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2} \end{bmatrix}$$

Το πρώτο διαγώνιο στοιχείο της τελευταίας μήτρας αποτελεί τη διακύμανση του $\hat{\beta}_1$, δηλαδή

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}{N \sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2},$$

ενώ το δεύτερο του εκτιμητή $\hat{\beta}_2$, δηλαδή $\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) = \sigma^2 \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2} = \sigma^2 \left[\sum_{i=1}^{N} (x_i - \overline{x})^2 \right]^{-1}$.

Το μη διαγώνιο στοιχείο της μήτρας αποτελεί τη συνδιακύμανση των εκτιμητών $\hat{\beta}_1$ και $\hat{\beta}_2$.

(iv) Η κατανομή του LS εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ όταν ε $\sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{I})$:

Επειδή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ **αποτελεί** γραμμικό συνδυασμό του διανύσματος **ε που ακολουθεί την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή**:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad \text{όπου } \mathbf{C} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}',$$

ο εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ακολουθεί και αυτός την πολυμεταβλητή κανονική κατανομή με μέση τιμή $E(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta}$ και διακύμανση $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, δηλαδή[2]

[2] Η διακύμανση του $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ μπορεί επίσης να βρεθεί αναλυτικά ως εξής:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathrm{N}\Big[\, \mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}),\ \mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\Big]$$

$$\sim \mathrm{N}\Big[\, \boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\Big] \qquad (13)$$

Το αποτέλεσμα αυτό στηρίζεται στην ιδιότητα ότι γραμμικοί συνδυασμοί κανονικών κατανομών αποτελούν επίσης κανονικές κατανομές. [3]

Δ. Από κοινού έλεγχοι στατιστικών Υποθέσεων

- **Έλεγχος στατιστικής σημαντικότητας του υποδείγματος:**

Για το πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα,

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \ldots + \beta_K x_{iK} + \varepsilon_i\,, \qquad i = 1, ..., N,$$

η ακόλουθη μηδενική υπόθεση ενδιαφέρει παραπάνω από ένα συντελεστή:

$$H_0:\ \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_K = 0.$$

Αν αυτή ισχύει, τότε υπόδειγμα (3) δε θα έχει καμιά ερμηνευτικότητα (ή σημαντικότητα). Η υπόθεση αυτή θέτει (K-1)-περιορισμούς (επιμέρους υποθέσεις) στους συντελεστές κλίσης του πολλαπλού υποδείγματος:

$$\mathrm{Var}(\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{E}\Big[\big(\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{E}(\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon})\big)\big(\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \mathrm{E}(\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon})\big)'\Big]$$
$$= \mathrm{E}(\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{C}') = \mathbf{C}\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\mathbf{C}' = \mathbf{C}\sigma^2\mathbf{I}\mathbf{C}' = \sigma^2\mathbf{C}\mathbf{C}'$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία σχέση $\mathbf{C} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$, η τελευταία σχέση συνεπάγεται

$$\mathrm{Var}(\mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}.$$

[3] Σημειώστε ότι η δεσμευμένη κατανομή του εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ πάνω στις τιμές της μήτρας $\mathbf{X}$ του δείγματος δίνεται ως $\hat{\boldsymbol{\beta}} \,|\, \mathbf{X} \sim \mathrm{N}\big[\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\big]$. Αυτή προκύπτει αν υποθέσουμε ότι η δεσμευμένη κατανομή του διανύσματος των παρατηρήσεων του διαταρακτικού όρου πάνω σε αυτές της μήτρας $\mathbf{X}$ είναι κανονική και δίνεται ως εξής: $\boldsymbol{\varepsilon} \,|\, \mathbf{X} \sim \mathrm{N}(\mathbf{0}, \sigma^2\mathbf{I})$.

$$\beta_2 = 0,\ \beta_3 = 0,\ \ldots \text{και}\ \beta_K = 0.$$

Για να ελεγχθεί η παραπάνω υπόθεση, θα θέσουμε τη **μηδενική και εναλλακτική υπόθεση** ως:

$$H_0: \quad \beta_2 = \beta_3 = \ldots = \beta_K = 0$$

$$H_\alpha: \quad \beta_2 \neq 0 \ \text{ή}\ \beta_3 \neq 0 \ldots \text{ή}\ \beta_K \neq 0$$

ή με τη χρήση διανυσμάτων ως:

$$H_0 : \underset{(K-1)X1}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} = \underset{(K-1)X1}{\mathbf{0}} \quad \text{και} \quad H_\alpha : \underset{(K-1)X1}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} \neq \underset{(K-1)X1}{\mathbf{0}}, \ \text{όπου} \ \underset{(K-1)X1}{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} \ \text{και} \ \underset{(K-1)X1}{\mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το στατιστικό κριτήριο που θα χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο αυτό θα στηριχθεί στις αποστάσεις των εκτιμήσεων των συντελεστών από τις θεωρητικές τιμές τους:

$$\underset{(K-1)X1}{\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}} - \mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 - 0 \\ \hat{\beta}_3 - 0 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_K - 0 \end{bmatrix}.$$

Το διάνυσμα αυτό τυποποιείτε έτσι ώστε να έχει μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης που να ισούται με την ταυτοτική μήτρα **I** ως εξής: [4]

---

[4] $\mathrm{Var}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}})$ αποτελεί τη μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης του διανύσματος $\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}$. Αυτή ορίζεται ως

$$\mathrm{Var}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}) = \underset{((K-1)X(K-1))}{\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3) & \cdots & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_K) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3) & \mathrm{Var}(\hat{\beta}_3) & \cdots & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_3,\hat{\beta}_K) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_K,\hat{\beta}_2) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_K,\hat{\beta}_3) & \cdots & \mathrm{Var}(\hat{\beta}_K) \end{bmatrix}},$$

οπότε το τυποποιημένο διάνυσμα γράφεται ορίζεται ως:

$$\underset{((K-1)X(K-1))}{\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\hat{\beta}_2) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3) & \cdots & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_K) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_2,\hat{\beta}_3) & \mathrm{Var}(\hat{\beta}_3) & \cdots & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_3,\hat{\beta}_K) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_K,\hat{\beta}_2) & \mathrm{Cov}(\hat{\beta}_K,\hat{\beta}_3) & \cdots & \mathrm{Var}(\hat{\beta}_K) \end{bmatrix}^{-1/2}} \underset{(K-1)X1}{\begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 - 0 \\ \hat{\beta}_3 - 0 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_K - 0 \end{bmatrix}}$$

$$\mathrm{Var}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}})^{-1/2}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}-\mathbf{0})$$

Προ-Πολλαπλασιαζόμενο με το ανάστροφο του, το διάνυσμα αυτό μας δίνει το ακόλουθο <u>τετραγωνικό μέτρο των τυποποιημένων αποστάσεων</u> $(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}-\mathbf{0})$:[5]

$$\left[\mathrm{Var}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}})^{-1/2}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}-\mathbf{0})\right]'\left[\mathrm{Var}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}})^{-1/2}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}-\mathbf{0})\right]$$
$$= (\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}-\mathbf{0})'\left[\mathrm{Var}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}})^{-1/2}\right]'\left[\mathrm{Var}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}})^{-1/2}\right](\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}-\mathbf{0}) = (\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}-\mathbf{0})'\left[\mathrm{Var}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}})\right]^{-1}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}-\mathbf{0}),$$

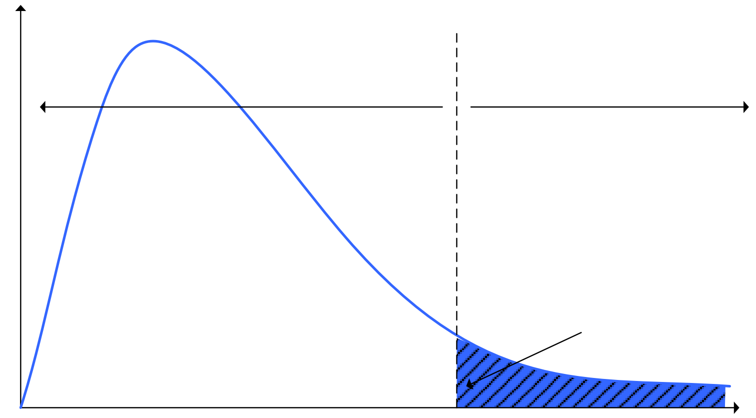
Αν το μέτρο αυτό λαμβάνει μια τιμή κοντά στο μηδέν, τότε η υπόθεση H_0 θα πρέπει να ικανοποιείται. Αυτό μπορεί να ελεγχθεί στατιστικά, βασιζόμενοι στο παρακάτω <u>**στατιστικό κριτήριο F**</u> που στηρίζεται στην απόσταση αυτή:

$$F = \frac{\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}'\left[\mathrm{Var}(\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}})\right]^{-1}\hat{\tilde{\boldsymbol{\beta}}}}{(K-1)},$$

όπου το μηδενικό διάνυσμα **0** παραλείπεται. Αυτό ακολουθεί **την F-κατανομή** με βαθμούς ελευθερίας K-1 και N-K (βλέπε σχήμα):

$$F \sim F_{(K-1,N-K)}.$$

ΣΧΗΜΑ 4.5: Η F-κατανομή



Αποδ (προαιρετική): Για την απόδειξη της κατανομής του κριτηρίου $\mathrm{F}=\dfrac{\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}'\left[\mathrm{Var}(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}})\right]^{-1}\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}}{(\mathrm{K}-1)}$, παρατηρήστε ότι η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης του διανύσματος $\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$, $\mathrm{Var}(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}})$, αποτελεί από την κάτω-διαγώνια (K-1)X(K-1) υπομήτρα όλου του διανύσματος των εκτιμητών $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, δηλαδή[6]

$$\mathrm{Var}(\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}})=\hat{\sigma}^2\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]_{cc}.$$

Αντικαθιστώντας τη μήτρα αυτή στον ορισμό του F έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= \frac{\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}'\left\{\left[\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]_{cc}\right\}^{-1}\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}}{(\mathrm{K}-1)}=\frac{\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}'\left\{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]_{cc}\right\}^{-1}\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}}{\hat{\sigma}^2(\mathrm{K}-1)}\\
&= \frac{\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}'\left\{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]_{cc}\right\}^{-1}\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}\Big/\sigma^2(\mathrm{K}-1)}{\hat{\sigma}^2\big/\sigma^2}, && \text{διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με } \sigma^2,\\
&= \frac{\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}'\left\{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]_{cc}\right\}^{-1}\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}\Big/\sigma^2(\mathrm{K}-1)}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}\big/\sigma^2(\mathrm{N}-\mathrm{K})}, && \text{αντικαθιστώντας } \hat{\sigma}^2=\frac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{(\mathrm{N}-\mathrm{K})},\\
&= \frac{w_1/(\mathrm{K}-1)}{w_2/(\mathrm{N}-\mathrm{K})},
\end{aligned}$$

όπου $w_1=\dfrac{\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}'\left\{\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right]_{cc}\right\}^{-1}\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(\mathrm{K}-1)}$ και $w_2=\dfrac{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}{\sigma^2}\sim\chi^2_{(\mathrm{N}-\mathrm{K})}$, όταν $\varepsilon_i\sim\mathrm{N}(0,\sigma^2)$. Η τελευταία σχέση δείχνει ότι το κριτήριο F αποτελεί πηλίκο δύο τυχαίων και ανεξάρτητων μεταβλητών w_1 και w_2 που διαιρούνται αντίστοιχα με τους βαθμούς ελευθερίας (ΒΕ) K-1 και N-K. Με βάση τη στατιστική θεωρία, το πηλίκο των μεταβλητών αυτών θα ακολουθεί

---

[5] Η χρήση των τετραγώνων των αποστάσεων έχει ως συνέπεια οι αποστάσεις των στοιχείων του $\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$ από το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$ να μην απαλείφονται μεταξύ τους.

[6] Η μήτρα αυτή δεν περιλαμβάνει την πρώτη γραμμή και στήλη της μήτρας $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})=\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, καθώς η διακύμανση του εκτιμητή $\hat{\beta}_1$ και οι συνδιακυμάνσεις του με τους άλλους εκτιμητές δεν απαιτούνται στον υπολογισμό του στατιστικού F για το διάνυσμα $\hat{\hat{\boldsymbol{\beta}}}$.

την F-κατανομή με βαθμούς ελευθερίας τους αντίστοιχους των χ^2-κατανεμημένων μεταβλητών που εμπλέκονται σε αυτό, δηλαδή[7]

$$\mathrm{F} \sim \mathrm{F}_{(\mathrm{K}-1,\mathrm{N}-\mathrm{K})}$$

Υπολογισμός του κριτηρίου F με βάση τα κατάλοιπα

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να υπολογιστεί το παραπάνω κριτήριο F στηρίζεται στον ακόλουθο τύπο:

$$\mathrm{F} = \frac{(RSS_R - RSS_U)/(\mathrm{K}-1)}{RSS_U/(\mathrm{N}-\mathrm{K})} = \frac{(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*} - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})/(\mathrm{K}-1)}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}/(\mathrm{N}-\mathrm{K})},$$

όπου

- RSS_U είναι το άθροισμα των τετραγώνων των καταλοίπων από την εκτίμηση του πολλαπλού υποδείγματος $\mathrm{y}_\mathrm{i} = \beta_1 + \beta_2 \mathrm{x}_{\mathrm{i}2} + \beta_3 \mathrm{x}_{\mathrm{i}3} + \ldots + \beta_\mathrm{K} \mathrm{x}_{\mathrm{iK}} + \varepsilon_\mathrm{i}$ (δηλ. $RSS_U = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$), και

- RSS_R είναι το αντίστοιχο άθροισμα αν το υπόδειγμα αυτό εκτιμηθεί κάτω από τους περιορισμούς (restrictions) της υπόθεσης H_0: $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$, δηλ. με βάση την παλινδρόμηση:

$$\mathrm{y}_\mathrm{i} = \beta_1 + \varepsilon_\mathrm{i}^{*}, \quad \text{(μόνο με τη σταθερά)}$$

δηλ. $RSS_R = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*}$.

Σχέση ανάμεσα στο κριτήριο F και t

Το κριτήριο F μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί ακόμα και για ατομικούς ελέγχους υποθέσεων για κάποιο συντελεστή του υποδείγματος. Η σχέση ανάμεσα στα δύο κριτήρια είναι:

$$\mathrm{F}_{(1,\mathrm{N}-\mathrm{K})} = \mathrm{t}^2_{(\mathrm{N}-\mathrm{K})}.$$

[7] Βλέπε Παράρτημα Β του βιβλίου. Αν w_1 και w_2 αποτελούν ανεξάρτητες μεταβλητές που κατανέμονται ως $w_1 \sim \chi^2_{(\mathrm{m}_1)}$ και $w_2 \sim \chi^2_{(\mathrm{m}_2)}$, τότε η F-κατανομή ορίζεται ως $\mathrm{F} = \frac{w_1/\mathrm{m}_1}{w_2/\mathrm{m}_2} \sim \mathrm{F}_{(\mathrm{m}_1,\mathrm{m}_2)}$.

Αποδ: Γράψτε το κριτήριο F για τον έλεγχο της στατιστικής σημαντικότητας έστω του συντελεστή β_2 ως εξής:

$$F_{(1,N-K)} = \frac{(\hat{\beta}_2 - 0)' \left[\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)\right]^{-1} (\hat{\beta}_2 - 0)}{1} = \frac{(\hat{\beta}_2 - 0)^2}{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_2)} = \left[\frac{\hat{\beta}_2 - 0}{\mathrm{SE}(\hat{\beta}_2)}\right]^2 = t^2_{(N-K)}$$

- ## Γενική μορφή του κριτηρίου F

Το κριτήριο F μπορεί να γενικευτεί για να ελέγχει πιο γενικές υποθέσεις (ή γραμμικούς περιορισμούς) στους συντελεστές του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος, όπως είναι οι παρακάτω, για ένα υπόδειγμα τριών ανεξάρτητων μεταβλητών μαζί με τη σταθερά (K=3):

$$H_0: \begin{Bmatrix} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 - \beta_3 = 0 \end{Bmatrix}, \quad H_0: \begin{Bmatrix} \beta_1 = 1.0 \\ 3\beta_2 + \beta_3 = 2.0 \end{Bmatrix}, \quad H_0: \begin{Bmatrix} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 1 \end{Bmatrix} \text{ και } H_0: \begin{Bmatrix} \beta_2 = 0 \\ \beta_3 = 0 \end{Bmatrix}.$$

Τις υποθέσεις αυτές μπορούμε να τις γράψουμε πιο γενικά ως εξής:

$$\underset{(JXK)}{\mathbf{R}} \underset{(KX1)}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{(JX1)}{\mathbf{r}},$$

όπου:

J δηλώνει τον αριθμό των υποθέσεων (σύνολο περιορισμών), πχ J=2 για τα παραπάνω παραδείγματα,

$\underset{(JXK)}{\mathbf{R}}$ είναι μία μήτρα σχεδιασμού (design matrix) που επιλέγει τους συντελεστές του υποδείγματος που αφορούν στους J-περιορισμούς και τέλος,

$\underset{(JX1)}{\mathbf{r}}$ αποτελεί το διάνυσμα των τιμών των περιορισμών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Για τις παραπάνω υποθέσεις (όπου K=3), η γενική μορφή $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ δίνεται ως:

i). H_0: $\beta_2 + 3\beta_3 = 0$ (J=1 γραμμικό περιορισμό)

$$\underset{(1X3)}{\overset{\mathbf{R}}{\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\end{bmatrix}}}\underset{(3X1)}{\overset{\boldsymbol{\beta}}{\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}}} = \underset{(1X1)}{\overset{\mathbf{r}}{\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}}}, \qquad \text{όπου } \underset{(1X3)}{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 3\end{bmatrix} \text{ και } \underset{(1X1)}{\mathbf{r}} = [0].$$

ii). H_0: $\begin{Bmatrix}\beta_1 = 0\\ \beta_2 - \beta_3 = 0\end{Bmatrix}$ (J=2 γραμμικούς περιορισμούς):

$$\underset{(2X3)}{\overset{\mathbf{R}}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}}}\underset{(3X1)}{\overset{\boldsymbol{\beta}}{\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}}} = \underset{(2X1)}{\overset{\mathbf{r}}{\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}}}$$

iii). H_0: $\begin{Bmatrix}\beta_1 = 1.0\\ 3\beta_2 + \beta_3 = 2.0\end{Bmatrix}$ (J=2 γραμμικούς περιορισμούς):

$$\underset{(2X3)}{\overset{\mathbf{R}}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\end{bmatrix}}}\underset{(3X1)}{\overset{\boldsymbol{\beta}}{\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}}} = \underset{(2X1)}{\overset{\mathbf{r}}{\begin{bmatrix}1.0\\ 2.0\end{bmatrix}}}$$

iv). H_0: $\begin{Bmatrix}\beta_2 = 0\\ \beta_3 = 0\end{Bmatrix}$ (J=2 γραμμικούς περιορισμούς – όμοια με την H_0: $\tilde{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{0}$):

$$\underset{(2X3)}{\overset{\mathbf{R}}{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}}\underset{(3X1)}{\overset{\boldsymbol{\beta}}{\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}}} = \underset{(2X1)}{\overset{\mathbf{r}}{\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}}}$$

Το στατιστικό κριτήριο για τον έλεγχο των παραπάνω J-γραμμικών περιορισμών (υποθέσεων) H_0: $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ ορίζεται ως:

$$\underset{(1X1)}{F} = \frac{\underset{(1XJ)}{(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})'}\left[\mathrm{Var}(\underset{(JXK)}{\mathbf{R}}\underset{(KXK)}{\hat{\boldsymbol{\beta}}})\right]^{-1}\underset{(JX1)}{(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})}}{J}$$

$$= \frac{\underset{(1XJ)}{(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})'}\left[\underset{(JXK)}{\mathbf{R}}\underset{(KXK)}{\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})}\underset{(KXJ)}{\mathbf{R}'}\right]^{-1}\underset{(JX1)}{(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{r})}}{J}, \text{ καθώς } \mathrm{Var}(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \mathbf{R}\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{R}'$$

$$= \frac{(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{r})'\left[\mathbf{R}\hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1}(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{r})}{J}$$

$$= \frac{(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{r})'\left[\mathbf{R}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{R}'\right]^{-1}(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{r})}{\hat{\sigma}^2 J},$$

όπου το διάνυσμα $(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{r})$ μετρά τις αποστάσεις των περιορισμών $\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}$, που υπολογίζονται με βάση τις LS εκτιμήσεις των συντελεστών του υποδείγματος, από τις υποθετικές τιμές τους, που συλλέγονται στο διάνυσμα **r.**[8]

Το στατιστικό κριτήριο F κατανέμεται ως εξής:

$$F \sim F_{(J,N-K)}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Θεωρήστε το ακόλουθο υπόδειγμα ζήτησης χρήματος M_t

$$M_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + \beta_3 r_t + \varepsilon_t, \qquad t = 1,..., T = 30,$$

δίδονται οι ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 0.10 \\ 1.0 \\ -0.5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{bmatrix} 0.05 & 0.20 & 0.10 \\ 0.20 & 0.40 & 0.20 \\ 0.10 & 0.20 & 0.20 \end{bmatrix}.$$

Ελέγξτε την υπόθεση $\beta_2 + \beta_3 = 0$, σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.

Ο περιορισμός $\beta_2 + \beta_3 = 0$ γράφεται στη μορφή $\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{r}$ ως:

$$\underset{(1X3)}{\overset{\mathbf{R}}{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}} \underset{(3X1)}{\overset{\boldsymbol{\beta}}{\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}}} = \underset{(1X1)}{\overset{\mathbf{r}}{[0]}}, \qquad \text{καθώς } J = 1.$$

---

[8] Η διακύμανση του διανύσματος $\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}$ υπολογίζεται ως :

$$\text{Var}(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}) = E\left[(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta})(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{R}\boldsymbol{\beta})'\right] = E\left[\mathbf{R}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\mathbf{R}'\right]$$

$$= \mathbf{R}E\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\right]\mathbf{R}' = \mathbf{R}\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{R}'$$

και το στατιστικό κριτήριο F ως

$$\mathbf{F}=\frac{(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{r})'\left[\mathbf{R}\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{R}'\right]^{-1}(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{r})}{\mathrm{J}}=\frac{0.5[1.0]^{-1}0.5}{1}=0.25,$$

όπου

$$\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\mathbf{r}=1.0-0.5-0=0.5,$$

$$\mathbf{R}\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\mathbf{R}'=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.05 & 0.20 & 0.10\\ 0.20 & 0.40 & 0.20\\ 0.10 & 0.20 & 0.20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=1.0 \quad \text{και J = 1.}$$

Σε 5% επίπεδο σημαντικότητας, η κριτική τιμή της F-κατανομής υπολογίζεται ως $\mathrm{F_c}=\mathrm{F_{(J=1,T\text{-}K=27)}}=4.21$. Με βάση αυτή, έχουμε F = 0.25 < F_c = 4.21 και έτσι, δεν απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση $\beta_2+\beta_3 = 0$.

Υπολογισμός του κριτηρίου F με βάση τα κατάλοιπα (όπως και προηγουμένως):

$$\mathrm{F}=\frac{(RSS_R-RSS_U)/\mathrm{J}}{RSS_U/(\mathrm{N}-\mathrm{K})}=\frac{(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*}-\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})/\mathrm{J}}{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}/(\mathrm{N}-\mathrm{K})}$$

όπου $RSS_U=\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ και $RSS_R=\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*\prime}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^{*}$. Για το προηγούμενο παράδειγμα, το υπόδειγμα κάτω από τον περιορισμό $\beta_2+\beta_3=0$ γράφεται ως:

$$\mathrm{M_t}=\beta_1+\beta_2(\mathrm{Y_t}-\mathrm{r_t})+\varepsilon_t^*,$$

καθώς $\beta_3=-\beta_2$.