παίρνουμε τις εκτιμήσεις του εφικτού γενικευμένου εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων (FGLS) για τους συντελεστές του SURE υποδείγματος. Όπως ο FGLS εκτιμητής των συντελεστών του απλού γραμμικού υποδείγματος μιας εξίσωσης που παρουσιάσαμε στα Κεφάλαια 7 και 8, έτσι και ο παραπάνω FGLS εκτιμητής των συντελεστών του SURE υποδείγματος θα είναι μόνο συνεπής.

### Γενίκευση του SURE υποδείγματος για N εξισώσεις

Το υπόδειγμα SURE, που δίνεται από τις σχέσεις (2α) (ή (2β)), μπορεί εύκολα να γενικευτεί για N διαφορετικές εξισώσεις η κάθε μια από τις οποίες αποτελείται από K ανεξάρτητες μεταβλητές. Στην περίπτωση αυτή, αυτό γράφεται ως εξής:

$$\underset{(NTX1)}{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_N \end{bmatrix}} = \underset{(NTXNK}{\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{X}_N \end{bmatrix}} \underset{(NKX1)}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\beta}_N \end{bmatrix}} + \underset{(NTX1)}{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_N \end{bmatrix}}, \qquad (9\alpha)$$

ή σε πιο συνοπτική μορφή

$$\underset{(NTX1)}{\mathbf{y}} = \underset{(NTXNK)}{\mathbf{X}} \cdot \underset{(NKX1)}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{(NTX1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (9\beta)$$

Η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης του διανύσματος των συγκεντρωμένων παρατηρήσεων του διαταρακτικού όρου $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon})$, του παραπάνω υποδείγματος ορίζεται ως ακολούθως:

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \boldsymbol{\Omega} = \underset{(NTXNT)}{\begin{bmatrix} \sigma_1^2\mathbf{I}_T & \sigma_{12}\mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{1N}\mathbf{I}_T \\ \sigma_{21}\mathbf{I}_T & \sigma_2^2\mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_{2N}\mathbf{I}_T \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1}\mathbf{I}_T & \sigma_{N2}\mathbf{I}_T & \cdots & \sigma_N^2\mathbf{I}_T \end{bmatrix}} = \boldsymbol{\Sigma} \otimes \mathbf{I}_T,$$

όπου τώρα η μήτρα των ταυτοχρόνων διακυμάνσεων-συνδιακυμάνσεων των διαστρωματικών παρατηρήσεων του διαταρακτικού όρου $\mathbf{\Sigma}$ έχει διάσταση (NXN) και ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{\Sigma}=\underset{(NXN)}{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}}.$$

Ο GLS εκτιμητής του διανύσματος των συντελεστών του SURE υποδείγματος (9α) και η διακύμανσή του έχουν ακριβώς τους ίδιους τύπους με αυτούς που δίνονται από τις σχέσεις (5) και (6) αντίστοιχα. Το μόνο πράγμα που αλλάζει σε σχέση με τους τύπους αυτούς είναι οι διαστάσεις των μητρών $\mathbf{X}$ και $\mathbf{\Sigma}$. Αυτές τώρα έχουν διαστάσεις (NTXNT) και (NXN), αντίστοιχα. Με βάση την ασυμπτωτική θεωρία μπορεί να αποδειχθεί ότι, αν το διάνυσμα των χρονολογικών παρατηρήσεων των διαταρακτικών όρων του SUR υποδείγματος ακολουθεί τις κλασικές υποθέσεις (δηλαδή κατανέμεται ως $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim \text{IID}(\mathbf{0}, \sigma_i^2\mathbf{I}_T)$, $\forall i$), τότε η κατανομή του εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$ για μεγάλο δείγμα χρονολογικών παρατηρήσεων T είναι κανονική και δίνεται ως ακολούθως:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} \sim \text{N}\left[\boldsymbol{\beta}, Asy\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS})\right], \tag{10}$$

όπου

$$Asy\text{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS})=\frac{1}{N}\sigma^2\left(\mathbf{Q}_{X\Sigma X}\right)^{-1} \quad \text{και} \quad \mathbf{Q}_{X\Sigma X} = \text{E}\left\{\frac{1}{N}\left[\mathbf{X}'(\mathbf{\Sigma}^{-1}\otimes\mathbf{I}_T)\mathbf{X}\right]^{-1}\right\}.$$

Ένας συνεπής εκτιμητής της ασυμπτωτικής διακύμανσης του εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$ είναι ο ακόλουθος:

$$\hat{\mathbf{V}} = \left[\mathbf{X}'(\hat{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\otimes\mathbf{I}_T)\mathbf{X}\right]^{-1},$$

όπου $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ αποτελεί ένα συνεπή εκτιμητή της μήτρας $\boldsymbol{\Sigma}$. Τα στοιχεία της μήτρας $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ εκτιμώνται συνεπώς με βάση τους τύπους που δίνονται στο προηγούμενο τμήμα για την εκτίμηση των διακυμάνσεων $\sigma_i^2$ και των συνδιακυμάνσεων $\sigma_{ij}$ των διαταρακτικών όρων του SUR υποδείγματος.

## 13.2 Έλεγχοι στατιστικών υποθέσεων στο SURE υπόδειγμα

Η ασυμπτωτική κατανομή του GLS εκτιμητή των συντελεστών βήτα του SURE υποδείγματος, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$, που δίνεται από τη σχέση (10), μπορεί να χρησιμοποιηθεί στη διεξαγωγή στατιστικών ελέγχων για αυτούς. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τα γνωστά στατιστικά κριτήρια που αναπτύξαμε σε προηγούμενα κεφάλαια του βιβλίου. Δύο έλεγχοι που έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στα πλαίσια του SURE υποδείγματος είναι αυτός της ετερογένειας των συντελεστών βήτα μεταξύ των διαφορετικών εξισώσεων αυτού και ο έλεγχος της ταυτόχρονης συσχέτισης ανάμεσα στις παρατηρήσεις των διαφορετικών διαταρακτικών του όρων. Ο τελευταίος αποτελεί και ισοδύναμο έλεγχο ύπαρξης συσχέτισης (ή αλληλεξάρτησης) μεταξύ των παρατηρήσεων των διαφορετικών διαστρωματικών μονάδων της εξαρτημένης μεταβλητής του συστήματος. Οι έλεγχοι αυτοί παρουσιάζονται αναλυτικότερα στη συνέχεια του κεφαλαίου.

**Έλεγχος ετερογένειας των συντελεστών**

Για να ελεγχθεί αν οι συντελεστές βήτα του SURE υποδείγματος είναι ίδιοι μεταξύ των διαφορετικών εξισώσεων αυτού (i=1,2,..,N), η μηδενική υπόθεση τίθεται ως εξής:[2]

$$H_0: \ \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2 = \ldots = \boldsymbol{\beta}_N = \boldsymbol{\beta}$$

Η υπόθεση αυτή ελέγχεται έναντι της εναλλακτικής της ότι κάποια από τα διανύσματα των συντελεστών $\boldsymbol{\beta}_i$ διαφέρουν ανάμεσα στις εξισώσεις του SURE υποδείγματος, δηλαδή ισχύει η σχέση:

$$\mathrm{H}_\alpha: \ \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_2 \ \text{ή} \ \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_3 = \ldots \text{ή} \ \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_N .$$

Η απόρριψη της παραπάνω μηδενικής υπόθεσης $H_0$ και η αποδοχή της εναλλακτικής της $H_\alpha$ σημαίνει ότι υπάρχει σημαντική ένδειξη ετερογένειας μεταξύ των διαφορετικών διαστρωματικών μονάδων i του SURE υποδείγματος.

Η παραπάνω μηδενική υπόθεση μπορεί να ελεγχθεί χρησιμοποιώντας ένα από τα γνωστά ασυμπτωτικά ισοδύναμα στατιστικά κριτήρια, δηλ. το κριτήριο W ή τα κριτήρια LR και LM. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τον έλεγχο της υπόθεσης αυτής στηριζόμενοι στο κριτήριο W. Για λόγους ευκολίας, θεωρούμε ότι ο αριθμός των διαφορετικών εξισώσεων του SURE υποδείγματος είναι N=2 (δηλ. i=1,2). Τότε, η μηδενική υπόθεση και η εναλλακτική της γράφονται ως ακολούθως:

$$\mathrm{H}_0: \ \beta_{12} = \beta_{22} \ \text{και} \ \beta_{13} = \beta_{23}$$

και

$$\mathrm{H}_\alpha: \ \beta_{12} \neq \beta_{12} \ \text{και} \ \beta_{13} \neq \beta_{23} .$$

$\beta_{22}$

Όπως γνωρίζουμε από το Κεφάλαιο 4, η παραπάνω μηδενική υπόθεση μπορεί να διατυπωθεί στη μορφή των ακόλουθων J γραμμικών περιορισμών στο διάνυσμα των συντελεστών $\boldsymbol{\beta}$ του SUR υποδείγματος:

$$\mathrm{H}_0: \ \underset{(JXNK)}{\mathbf{R}} \ \underset{(NKX1)}{\boldsymbol{\beta}} = \underset{(JX1)}{\mathbf{r}} \quad (\text{ή ως } \mathbf{R}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{r} = \mathbf{0}),$$

όπου $\mathbf{r}$ αποτελεί το διάνυσμα των τιμών των περιορισμών και $\mathbf{R}$ αποτελεί τη μήτρα σχεδιασμού. Η μήτρα αυτή επιλέγει τους συντελεστές βήτα του SURE υποδείγματος που εμπλέκονται στον παραπάνω έλεγχο. Στη περίπτωσή του παραδείγματός μας, όπου K=3, N=2 και J=2, η σχέση των παραπάνω γραμμικών περιορισμών γράφεται πιο αναλυτικά ως εξής:

[2] Σημειώστε ότι η μηδενική αυτή υπόθεση μπορεί να αφορά έναν ορισμένο αριθμό συντελεστών του υποδείγματος και όχι όλους.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{r}}$$

Το κριτήριο W που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον έλεγχο των περιορισμών αυτών γράφεται ως εξής:

$$\mathrm{W} = \left(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} - \mathbf{r}\right)' \left\{\mathbf{R}\left[\mathbf{X}'(\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{T}})\mathbf{X}\right]^{-1} \mathbf{R}'\right\}^{-1} \left(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} - \mathbf{r}\right).$$

Για μεγάλο αριθμό χρονολογικών παρατηρήσεων και με βάση την ασυμπτωτική κατανομή του εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$, αποδεικνύεται ότι το κριτήριο W ακολουθεί τη $\chi^2$-κατανομή με J βαθμούς ελευθερίας. Οι βαθμοί αυτοί ισούνται με τον αριθμό των προς έλεγχο περιορισμών.[3]

[3] Η απόδειξη της κατανομής του κριτηρίου W προκύπτει εύκολα πολλαπλασιάζοντας την ασυμπτωτική κατανομή του $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$, που δίνεται από τη σχέση (10) με τη μήτρα **R** και στη συνέχεια, αφαιρώντας από τη σχέση που προκύπτει το διάνυσμα των τιμών των J περιορισμών **r**. Τότε, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} - \mathbf{r} &\sim \mathrm{N}\left\{\mathbf{R}\boldsymbol{\beta} - \mathbf{r}, \mathbf{R}\left[\mathbf{X}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{T}})\mathbf{X}\right]^{-1} \mathbf{R}'\right\} \\ &\sim \mathrm{N}\left\{\mathbf{0}, \mathbf{R}\left[\mathbf{X}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{T}})\mathbf{X}\right]^{-1} \mathbf{R}'\right\}. \end{aligned}$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα συνεπάγεται ότι η τυποποιημένη τετραγωνική μορφή του διανύσματος των αποστάσεων $\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} - \mathbf{r}$ κατανέμεται ως

$$(\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} - \mathbf{r})' \left\{\mathbf{R}\left[\mathbf{X}'(\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \otimes \mathbf{I}_{\mathrm{T}})\mathbf{X}\right]^{-1} \mathbf{R}'\right\}^{-1} (\mathbf{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} - \mathbf{r}) \sim \chi^2_{(\mathrm{J})}.$$

Σημειώστε ότι, για μεγάλα δείγματα χρονολογικών παρατηρήσεων, το αποτέλεσμα αυτό ισχύει ακόμα και αν τα στοιχεία της μήτρας **Σ** αντικατασταθούν με συνεπείς εκτιμήσεις τους.

**Έλεγχος ταυτόχρονης συσχέτισης μεταξύ των διαταρακτικών όρων**

Όπως έχει δείξει η μέχρι τώρα ανάλυση μας, η ύπαρξη ή όχι ταυτόχρονης συσχέτισης (ή αλληλεξάρτησης) μεταξύ των παρατηρήσεων των διαφορετικών διαστρωματικών διαταρακτικών όρων $\varepsilon_{it}$ του SURE υποδείγματος είναι κρίσιμη για την επιλογή της σωστής μεθόδου εκτίμησης των συντελεστών βήτα αυτού. Αν υπάρχει τέτοιου είδους αλληλεξάρτηση, τότε οι συντελεστές βήτα εκτιμώνται αποτελεσματικά μόνο με βάση τον GLS εκτιμητή. Στην αντίθετη περίπτωση, αυτοί μπορούν να εκτιμηθούν αποτελεσματικά στηριζόμενοι στη μέθοδο LS για κάθε μια εξίσωση του SURE υποδείγματος, ξεχωριστά.

Ένας έλεγχος που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία για τη διάγνωση ταυτόχρονης αλληλεξάρτησης ανάμεσα στους διαφορετικούς διαταρακτικούς όρους του SURE υποδείγματος στηρίζεται στις συνδιακυμάνσεις τους $\sigma_{ij}$, για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς i και j των διαταρακτικών όρων $\varepsilon_{it}$ και $\varepsilon_{jt}$. Αν οι συνδιακυμάνσεις αυτές είναι μηδέν, τότε η υπόθεση της αλληλεξάρτησης τους απορρίπτεται. Για τον έλεγχο της υπόθεσης αυτής, θέτουμε την ακόλουθη μηδενική υπόθεση:

$$H_0: \ \sigma_{ij} = 0, \ \forall i \neq j$$

έναντι της εναλλακτικής της

$$H_\alpha: \ \sigma_{ij} \neq 0, \ \text{για κάποιο τυχόν ζεύγος } i \neq j$$

Η εναλλακτική αυτή υπόθεση σημαίνει ότι, μεταξύ όλων των διαφορετικών διαστρωματικών διαταρακτικών όρων του SURE υποδείγματος $\sigma_{ij}$, υπάρχει τουλάχιστο μια συνδιακύμανση $\sigma_{ij}$ η οποία είναι διάφορη του μηδενός. Ένα στατιστικό κριτήριο που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο της παραπάνω μηδενικής υπόθεσης είναι το ακόλουθο:

$$q = T \cdot \left( \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} r_{ij}^2 \right),$$

όπου $r_{ij}^2=\left(\dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}\right)^2$ είναι το τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των διαταρακτικών όρων $\varepsilon_{it}$ και $\varepsilon_{jt}$. Ο συντελεστής αυτός μπορεί να εκτιμηθεί από τα κατάλοιπα των εξισώσεων i και j του SURE υποδείγματος των οποίων οι συντελεστές εκτιμώνται με βάση τη μέθοδο LS. Για μεγάλο δείγμα χρονολογικών παρατηρήσεων, αποδεικνύεται ότι, κάτω από τη μηδενική υπόθεση, το κριτήριο q ακολουθεί τη $\chi^2$-κατανομή με βαθμούς ελευθερίας που ισούνται με το συνολικό αριθμό των συντελεστών συσχέτισης $r_{ij}$ μεταξύ των διαφορετικών διαταρακτικών όρων του SURE υποδείγματος. Ο αριθμός αυτός ανέρχεται σε N(N-1)/2.

## 13.3 Πάνελ υποδείγματα διαχρονικών και διαστρωματικών δεδομένων (Panel data models)

Στη περίπτωση όπου το διάνυσμα των συντελεστών βήτα $\mathbf{\beta}_i$ είναι το ίδιο μεταξύ όλων των διαφορετικών εξισώσεων του SURE υποδείγματος, που αντιστοιχούν στις διαστρωματικές μονάδες i, δηλαδή ισχύουν οι ακόλουθοι περιορισμοί:

$$\beta_{11}=\beta_{21}=\beta_1,\ \beta_{12}=\beta_{21}=\beta_2 \text{ και } \beta_{13}=\beta_{23}=\beta_3, \qquad \text{για i=1,2,}$$

$\beta_{22}$

τότε, αντί του SUR υποδείγματος (3α), μπορεί να χρησιμοποιηθεί το παρακάτω υπόδειγμα:

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ \\ y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{112} & x_{113} \\ 1 & x_{122} & x_{123} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1T2} & x_{1T3} \\ & & \\ 1 & x_{212} & x_{213} \\ 1 & x_{222} & x_{223} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{2T2} & x_{2T3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1T} \\ \\ \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2T} \end{bmatrix}, \tag{11}$$

για την εκτίμηση των συντελεστών $\boldsymbol{\beta}$ του υποδείγματος (1). Το υπόδειγμα (11) γράφεται με τη βοήθεια γραμμικής άλγεβρας ως εξής:

$$\underset{(2TX1)}{\begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix}} = \underset{(2TX3)}{\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix}} \underset{(3X1)}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{(2TX1)}{\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1\\ \boldsymbol{\varepsilon}_2\end{bmatrix}}, \qquad (12\alpha)$$

όπου $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)'$, ή σε πιο γενική μορφή ως

$$\underset{(2TX1)}{\mathbf{y}} = \underset{(2TX3)}{\mathbf{X}} \underset{(3X1)}{\boldsymbol{\beta}} + \underset{(2TX1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad (12\beta)$$

Αναφέρεται δε στη βιβλιογραφία ως πάνελ υπόδειγμα διαστρωματικών και χρονολογικών δεδομένων (panel data model).

Αν το διάνυσμα των παρατηρήσεων του διαταρακτικού όρου $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ έχει την ίδια διακύμανση για όλες τις διαστρωματικές μονάδες i του υποδείγματος (δηλ. ισχύει $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_T), \ \forall i$) και οι τιμές των διαταρακτικών όρων δε συσχετίζονται μεταξύ των διαφορετικών διαστρωματικών μονάδων i (δηλ. ισχύει $\mathrm{E}(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = 0, \forall i \neq j$), τότε οι συντελεστές του πάνελ υποδείγματος, που δίνεται από τις σχέσεις (12α) ή (12β), μπορεί να εκτιμηθούν αποτελεσματικά βασιζόμενοι στον εκτιμητή LS. Για το παραπάνω υπόδειγμα όπου i=1,2, ο LS εκτιμητής δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left\{ \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1' & \mathbf{X}_2'\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1' & \mathbf{X}_2'\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{y}_1\\ \mathbf{y}_2\end{bmatrix} = \left(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\right)^{-1} \left(\mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 + \mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2\right) \qquad (13\alpha)$$

Για N-αριθμό διαστρωματικών μονάδων, ο παραπάνω εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ γενικεύεται ως εξής:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{X}_i'\mathbf{y}_i\right) \qquad (13\beta)$$

Για μεγάλο αριθμό διαστρωματικών στοιχείων (πιο συγκεκριμένα, καθώς. $N \to \infty$), ο εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ κατανέμεται κανονικά ανεξάρτητα του μεγέθους των χρονολογικών παρατηρήσεων Τ του πάνελ. Η δε ασυμπτωτική κατανομή του δίνεται ως ακολούθως

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim \mathrm{N}\left[\boldsymbol{\beta}, \mathit{Asy}\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})\right],$$

όπου

$$\mathit{Asy}\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \frac{1}{\mathrm{N}}\sigma^2\left(\mathbf{Q}_{\mathrm{XX}}\right)^{-1} \text{ και } \mathbf{Q}_{\mathrm{XX}} = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right).$$

Ένας συνεπής εκτιμητής της παραπάνω ασυμπτωτικής διακύμανσης του εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ για $N \to \infty$ είναι ο ακόλουθος:

$$\hat{\mathbf{V}} = \hat{\sigma}^2\left(\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1},$$

όπου $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}\hat{\varepsilon}_i'\hat{\varepsilon}_i}{NT}$ αποτελεί συνεπή εκτιμητή της διακύμανσης των τιμών του διαταρακτικού όρου $\varepsilon_{it}$, $\sigma^2$.

Βασιζόμενοι στην παραπάνω ασυμπτωτική κατανομή του $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ μπορούμε να διεξάγουμε ελέγχους στατιστικών υποθέσεων για τους συντελεστές βήτα του πάνελ υποδείγματος. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, οι έλεγχοι αυτοί θα είναι αποτελεσματικοί ακόμα και για πάνελ υποδείγματα των οποίων η χρονολογική διάσταση είναι αρκετά μικρή, εφόσον βέβαια η διάσταση των διαστρωματικών δεδομένων Ν είναι αρκετά μεγάλη. Στην εμπειρική έρευνα, τέτοια παραδείγματα συναντάμε πολύ συχνά σε μικροοικονομετρικές μελέτες όπου οι προσφορά χρονολογικών στοιχείων για τις διαστρωματικές μονάδες είναι συνήθως μικρή.

Ο LS εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ που παρουσιάσαμε παραπάνω, θεωρεί ότι οι χρονολογικές παρατηρήσεις του διαταρακτικού όρου έχουν την ίδια διακύμανση για όλες τις διαφορετικές διαστρωματικές μονάδες i του πάνελ, δηλ. $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim \mathrm{IID}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_T), \forall$ i. Η υπόθεση όμως αυτή δεν είναι αρκετά ρεαλιστική. Όπως συνήθως παρατηρείται στη πράξη, πολλές φορές υπάρχει σημαντική ετερογένεια ανάμεσα στις διαστρωματικές μονάδες ενός πληθυσμού. Σε μια τέτοια περίπτωση, το διάνυσμα των χρονολογικών παρατηρήσεων του διαταρακτικού όρου $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ παρουσιάζει διαφορετική διακύμανση μεταξύ των διαφορετικών διαστρωματικών μονάδων i του υποδείγματος, δηλ. έχουμε $\boldsymbol{\varepsilon}_i \sim \mathrm{IID}(0, \sigma_i^2 \mathbf{I}_T), \forall$ i. Αν επίσης και η συνδιακύμανση μεταξύ των διαφορετικών διαστρωματικών διαταρακτικών όρων είναι διάφορη του μηδενός, δηλ. $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_j') = \sigma_{ij} \mathbf{I}_T \neq \mathbf{0}$, τότε ο LS εκτιμητής του πάνελ υποδείγματος (13α) (ή 13β) δε θα είναι αποτελεσματικός. Στην περίπτωση αυτή, ένας αποτελεσματικός εκτιμητής που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση του διανύσματος $\boldsymbol{\beta}$ είναι ο ακόλουθος GLS εκτιμητής:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1' & \mathbf{X}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_T & \sigma_{12} \mathbf{I}_T \\ \sigma_{21} \mathbf{I}_T & \sigma_2^2 \mathbf{I}_T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1' & \mathbf{X}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_T & \sigma_{12} \mathbf{I}_T \\ \sigma_{21} \mathbf{I}_T & \sigma_2^2 \mathbf{I}_T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix},$$

όταν i=1,2. Η εύρεση της ασυμπτωτικής κατανομής του εκτιμητή αυτού και η συνέπεια αυτού απαιτεί τόσο ο αριθμός των διαστρωματικών μονάδων (N) όσο και των χρονολογικών παρατηρήσεων (T) του πάνελ να είναι μεγάλες, δηλ. να τείνουν στο άπειρο. Η μεγάλη χρονολογική διάσταση T του πάνελ απαιτείται για να μπορούν να εκτιμηθούν συνεπώς τα στοιχεία της μήτρας διακύμανσης-συνδιακύμανσης $\boldsymbol{\Sigma}$, δηλ. οι διακυμάνσεις $\sigma_i^2$ και οι συνδιακυμάνσεις $\sigma_{ij}$. Τέλος, σημειώστε ότι στη ειδική περίπτωση όπου $\sigma_{12}=0$, δηλαδή δεν υπάρχει αλληλεξάρτηση μεταξύ των διαστρωματικών μονάδων i του πάνελ, ο παραπάνω GLS εκτιμητής απλοποιείται και παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS} = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1' & \mathbf{X}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2^2 \mathbf{I}_T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1' & \mathbf{X}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 \mathbf{I}_T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_2^2 \mathbf{I}_T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{\sigma_1^2}\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 + \frac{1}{\sigma_2^2}\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2\right)^{-1}\left(\frac{1}{\sigma_1^2}\mathbf{X}_1'\mathbf{y}_1 + \frac{1}{\sigma_2^2}\mathbf{X}_2'\mathbf{y}_2\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{N=2}\frac{1}{\sigma_i^2}\mathbf{X}_i'\mathbf{X}_i\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N=2}\frac{1}{\sigma_i^2}\mathbf{X}_i'\mathbf{y}_i\right) \tag{14}$$

Και για τη μορφή αυτή όμως για να είναι ο εφικτός GLS εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{GLS}$ συνεπής θα πρέπει οι διακυμάνσεις $\sigma_i^2$ να έχουν εκτιμηθεί συνεπώς, πράγμα που απαιτεί μεγάλο αριθμό χρονολογικών παρατηρήσεων.