ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 :

ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΦΑΙΝΟΜΕΝΙΚΑ ΜΗ ΣΥΝΔΕΟΜΕΝΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ.

Σύστημα εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned}
y_{1t} &= B_{11} + B_{12} X_{1,t2} + B_{13} \cdot X_{1,t3} + \varepsilon_{1,t} \\
y_{2t} &= B_{21} + B_{22} X_{2,t2} + B_{23} X_{2,t3} + \varepsilon_{2,t} \\
&\vdots \\
y_{Nt} &= B_{N1} + B_{N2} \cdot X_{N,t2} + B_{N3} X_{N,t3} + \varepsilon_{Nt}.
\end{aligned}\right\} (2\alpha) \qquad t = 1,2,\dots T.$$

$$\Updownarrow$$

$$y_{it} = B_{i1} + B_{i2} \cdot X_{it,2} + B_{i3} \cdot X_{it,3} + \varepsilon_{it}. \quad (2\beta) \qquad i = 1,2,\dots N, \quad t = 1,2,\dots T.$$

Σύστημα φαινομενικά μη συνδεόμενων εξισώσεων.
(seemingly unrelated equations – SURE).

Λόγοι: 1) οι συντελεστές αλλάζουν κατά (i) επιχείρηση σε επιχείρηση.
2) πιο ακριβείς συντελεστές λόγω μεγάλου δείγματος.
↳ όταν υπάρχει συσχέτιση στα κατάλοιπα ε_{it} και ε_{jt}.
πχ. $E(\varepsilon_{it} \cdot \varepsilon_{jt}) = \sigma_{ij} \neq 0$. για $i \neq j$.

→ εκτίμηση SURE.
→ έλεγχος υποθέσεων
→ panel model

13.1 Σύστημα φαινομενικά μη συσχετισμένων εξισώσεων

$i = 1, 2.$

$$\begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1T} \\ \hline y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2T} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & X_{112} & X_{113} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & X_{122} & X_{123} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_{1T2} & X_{1T3} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & X_{212} & X_{213} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_{222} & X_{223} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X_{2T2} & X_{2T3} \end{array}\right) \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \hline \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1T} \\ \hline \varepsilon_{21} \\ \varepsilon_{22} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2T} \end{pmatrix}$$

$$\underset{2T\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} = \underset{2T \times 2\cdot 3}{\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}} \underset{2\cdot 3\times 1}{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}} + \underset{2T\times 1}{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}}.$$

$y = X \cdot \beta + \varepsilon$ όπου $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}.$

$$\underbrace{Var\left(\underset{2T\times 1}{\varepsilon}\right)}_{2T\times 2T} = \underset{2T\times 2T}{\Omega} = E(\varepsilon\varepsilon') = E\left[\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}(\varepsilon_1' \ \ \varepsilon_2')\right] = \begin{bmatrix} E(\varepsilon_1\varepsilon_1') & E(\varepsilon_1\varepsilon_2') \\ E(\varepsilon_2\varepsilon_1') & E(\varepsilon_2\varepsilon_2') \end{bmatrix}.$$

ως εξής

Διακρίνουμε σε (i) $E(\varepsilon_1\varepsilon_1')$ και $E(\varepsilon_2\varepsilon_2')$

(ii) $E(\varepsilon_1\varepsilon_2')$ και $E(\varepsilon_2\varepsilon_1')$.

$$E(\varepsilon_1\varepsilon_2') = E\left\{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1T} \end{pmatrix}(\varepsilon_{21} \ \ \varepsilon_{22} \ \dots \ \varepsilon_{2T})\right\} = E\begin{bmatrix} \varepsilon_{11}\cdot\varepsilon_{21} & \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{11}\varepsilon_{2T} \\ \vdots & & & \\ \varepsilon_{1T}\varepsilon_{21} & \varepsilon_{1T}\varepsilon_{22} & \dots & \varepsilon_{1T}\varepsilon_{2T} \end{bmatrix}$$

- για $i=1,$ $L=2.$ ανεξάρτητα και ομοιόμορφα. $\varepsilon_{it} \sim iid(0, \sigma_i^2)$ $\forall t.$

$$E(\varepsilon_1\varepsilon_1') = \sigma_1^2 \cdot I_T \quad , \quad E(\varepsilon_2\varepsilon_2') = \sigma_2^2 \cdot I_T .$$

- για $E(\varepsilon_1\varepsilon_2')$ 2 περιπτώσεις.

1) $E(\varepsilon_1\varepsilon_2') = 0.$ οι χρον. παρατηρήσεις των ε_1 και ε_2 δεν συσχετίζονται μεταξύ διαφορετικών διαστρωματικών μονάδων i.

2) $E(\varepsilon_1\varepsilon_2') = \sigma_{12}\cdot I_T = \begin{pmatrix} \sigma_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{12} \end{pmatrix}$ μόνο οι ταυτόχρονες παρατηρήσεις συσχετίζονται. ίδια συνδιακύμανση για όλες τις χρον. στιγμές t.

Αντίστοιχα το $Var(\varepsilon) = \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 I_T & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_T \end{pmatrix}}_{2T\times 2T}$ (1). $= \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}}_{2\times 2} \otimes \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}_{T\times T} = \Sigma \otimes I.$

και $Var(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 \cdot I_T & \sigma_{12}\cdot I_T \\ \sigma_{12}\cdot I_T & \sigma_2^2 I_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \Sigma \otimes I.$

Εκτίμηση του SURE με GLS.

όχι LS γιατί (1) το var(ε) δεν έχει ίδια διαγώνια στοιχεία

(2) το var(ε) " " " " " αλλά δεν είναι και διαγώνιος.

Γενική περίπτωση (2): $V_{ar}(\varepsilon) = \Sigma \otimes I_T = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \ddots 1 \end{pmatrix}.$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 I & \sigma_{12} I_T \\ \sigma_{12} I_T & \sigma_2^2 I_T \end{pmatrix}.$$

$$\hat{B}_{GLS} = \left(X' \Omega^{-1} \cdot X\right)^{-1} \cdot X' \Omega^{-1} \cdot y =$$

$$= \left[X' \cdot (\Sigma \otimes I)^{-1} \cdot X\right]^{-1} \cdot X' \cdot \left[\Sigma \otimes I_T\right]^{-1} \cdot y =$$

$$= \left[X'\left(\Sigma^{-1} \otimes I_T\right) X\right]^{-1} \cdot X' \cdot \left(\Sigma^{-1} \otimes I_T\right) y.$$

$$V_{ar}\left(\hat{B}_{GLS}\right) = \left(X' \Omega^{-1} X\right)^{-1} = \left(X'\left(\Sigma^{-1} \otimes I\right) X\right)^{-1}.$$

$$\underset{(N \times M) \otimes (K \times L)}{A \otimes B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \cdot B & \alpha_{12} \cdot B & \dots & \alpha_{1K} \cdot B \\ \alpha_{21} B & \alpha_{22} B & \dots & \alpha_{2K} B \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_{N1} B & \alpha_{N2} B & \dots & \alpha_{NM} B \end{pmatrix}.$$

$$(A \otimes B)' = A' \otimes B'$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

$$tr(A \otimes B) = tr(A) \cdot tr(B).$$

$$(A \otimes B) \cdot (C \otimes D) = AC \otimes BD.$$

$$|\underset{N \times N}{A} \otimes \underset{M \times M}{B}| = |A|^N \otimes |B|^M.$$

ο GLS είναι [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

[illegible]

$$\underset{2T\times 1}{y^*} = \underset{(2T\times 2\cdot 3)}{X^*}\cdot \underset{(2\cdot 3\times 1)}{\beta} + \underset{(2T\times 1)}{\varepsilon^*} \quad \text{ή} \quad Py = PX\beta + P\cdot\varepsilon.$$

$$y^* = Py\,, \quad X^* = PX\,, \quad \varepsilon^* = P\varepsilon. \qquad \underline{\Omega}^{-1} = P'P.$$

$$Var(\varepsilon^*) = E(\varepsilon^*\varepsilon^{*\prime}) = \underset{NT\times NT}{I}$$

Ειδική περίπτωση (1). $Var(\varepsilon) = \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 I_T & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I_T \end{pmatrix}.$

Τότε $\hat\beta_{GLS} = \begin{pmatrix} \hat\beta_{LS,1} \\ \hat\beta_{LS,2} \end{pmatrix}.$

γιατί $\hat\beta_{GLS} = \begin{pmatrix} \hat\beta_{GLS,1} \\ \hat\beta_{GLS,2} \end{pmatrix} = (X'\underline{\Omega}^{-1}\cdot X)^{-1}\cdot X'\underline{\Omega}^{-1}\cdot y =$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}' \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I \end{pmatrix}^{-1}}_{\begin{pmatrix} (1/\sigma_1^2) I & 0 \\ 0 & (1/\sigma_2^2) I \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}' \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 I & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 I \end{pmatrix}^{-1}}_{\boxed{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2^2} I \end{pmatrix}}} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$= \dots = \begin{pmatrix} (X_1'X_1)^{-1}\cdot X_1'y_1 \\ (X_2'X_2)^{-1}\cdot X_2'y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat\beta_{LS,1} \\ \hat\beta_{LS,2} \end{pmatrix}.$$

και $Var(\hat\beta_{GLS}) = (X'\underline{\Omega}^{-1}\cdot X)^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \sigma_1 I & 0 \\ 0 & \sigma_2 I \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix} \right\}^{-1}$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 (X_1'X_1)^{-1} & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 (X_2'X_2)^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Var(\beta_{LS,1}) & 0 \\ 0 & Var(\beta_{LS,2}) \end{pmatrix}.$$

οι GLS εκτιμητές μπορούν να υπολογιστούν αν $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_{12}$ είναι γνωστά, όταν όμως είναι άγνωστα. Εκτιμούνται ως εξής:

1) κάνω εκτίμηση LS. στις απλές εξισώσεις.
2) υπολογίζω κατάλοιπα $\hat{\varepsilon}_{it}$ για κάθε σειρά i
3) εκτιμώ σ_i^2, σ_{ij}. ως εξής, $\hat{\sigma}_i^2 = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_{it}^2}{T}$, $\sigma_{ij} = \dfrac{\sum_{t=1}^{T} \varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}}{T}$.

ως εδώ.

<u>Γενίκευση του SURE υποδείγματος για N εξισώσεις.</u>

$$\underset{NT\times 1}{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}} = \underset{NT\times NK}{\begin{pmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & X_N \end{pmatrix}} \cdot \underset{NK\times 1}{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}} + \underset{NT\times 1}{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{pmatrix}}.$$

$$\Downarrow$$

$$Y = X \cdot \beta + \varepsilon.$$

όπου $Var(\varepsilon) = E(\varepsilon\varepsilon') = \underline{\Omega} = \Sigma \otimes I_T = \underset{N\times N}{\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \dots & \sigma_{2N} \\ \vdots & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \dots & \sigma_N^2 \end{pmatrix}} \otimes \underset{T\times T}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}}$

$$\hat{\beta}_{GLS} = \left[X' \cdot (\Sigma^{-1} \otimes I_T) \cdot X\right]^{-1} \cdot X'(\Sigma^{-1} \otimes I_T)\, y.$$

$$Var(\hat{\beta}_{GLS}) = (X' \underline{\Omega}^{-1} \cdot X)^{-1} = \left(X' \cdot (\Sigma^{-1} \otimes I_T) \cdot X\right)^{-1}$$

$$\hat{\beta}_{GLS} \sim N\left(\beta,\ Asy.Var(\hat{\beta}_{GLS})\right)$$

13.2 Έλεγχος στατιστικών υποθέσεων στο SURE υπόδειγμα

- έλεγχος ετερογένειας των συντελεστών $\underline{B}$.
- έλεγχος ταυτόχρονης συσχέτισης μεταξύ των διαταρακτικών όρων.

Έλεγχος ετερογένειας

$H_0: \underline{\beta_1} = \underline{\beta_2} = \dots \underline{\beta_N} = \underline{\beta}$

$H_1: \underline{\beta_i} \neq \underline{\beta_j}$ για κάποιο i, j.

ή

$$H_0: \underset{(J\times NK)\cdot(NK\times 1)}{R \cdot B} = \underset{(J\times 1)}{r}.$$

ή $H_0: RB - r \neq 0$.

π.χ. για $N=2$, $i=1$, $i=2$.
$K=3$.

$H_0: \beta_{12} = \beta_{22}$ και $\beta_{13} = \beta_{23}$. (2 περιορισμοί $J=2$).

$H_1: \beta_{12} \neq \beta_{22}$ ή $\beta_{13} \neq \beta_{23}$

ή

$$H_0: R\,B = r \iff \underset{\substack{J \times N\cdot K \\ 2\times(2\cdot 3)}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \underset{\substack{NK\times 1 \\ 2\cdot 3\times 1}}{\begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{12} \\ \beta_{13} \\ \cdots \\ \beta_{21} \\ \beta_{22} \\ \beta_{23} \end{pmatrix}} = \underset{\substack{J\times 1 \\ 2\times 1.}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$W = \left(R \cdot \hat{\beta}_{GLS} - r\right)' \cdot \left\{ R \cdot \left[X' (\hat{\Sigma}^{-1} \otimes I_T) X \right]^{-1} \cdot R' \right\}^{-1} \cdot \left(R \hat{\beta}_{GLS} - r\right) \sim \chi^2_J$$

θα απορ. H_0 αν $W > \chi^2_{J, 1-\alpha}$.

Έλεγχος ταυτόχρονης συσχέτισης

$H_0: \sigma_{ij} = 0 \, , \ \forall i \neq j.$

$H_1: \sigma_{ij} \neq 0$, για κάποιο $i \neq j$.

Test statistic $= q = T \cdot \left(\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} r_{ij}^2 \right) \sim \chi^2_{\frac{N \cdot (N-1)}{2}}$. β.ε.λ.

όπου $r_{ij}^2 = \left(\dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \right)^2$: τετράγωνο του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ ε_{it} , ε_{jt} .

άρα απορ. H_0 αν $q > \chi^2_{\frac{N(N-1)}{2}, 1-\alpha}$.