Εισαγωγή στις Διακριτές Πιθανότητες

Μιχάλης Ζαζάνης
Τμήμα Στατιστικής
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

27 Δεκεμβρίου 2010

Κεφάλαιο 1

Συνδιαστική Ανάλυση και Μαθηματικές Τεχνικές

Η απαρίθμηση των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου δεν είναι πάντα εύκολη υπόθεση. Οι εξής δύο γενικές αρχές είναι πολύ χρήσιμες. Υπενθυμίζουμε ότι, αν A είναι ένα σύνολο, το $|A|$ συμβολίζει τον πληθικό του αριθμό δηλαδή το πλήθος των στοιχείων του.

Προσθετική Αρχή: Αν A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι σύνολα ξένα μεταξύ τους, δηλαδή $A_i \cup A_j = \emptyset$, όταν $i \neq j$, τότε

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Πολλαπλασιαστική Αρχή: Ο πληθικός αριθμός ενός καρτεσιανού γινομένου είναι το γινόμενο των πληθικών αριθμών των στοιχείων των συνόλων που το απαρτίζουν δηλαδή

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|.$$

1.1 Διατάξεις, Μεταθέσεις και Συνδιασμοί

1.1.1 Διατάξεις χωρίς επανάληψη

Έστω n διακριτά αντικείμενα. Διαλέγουμε k από αυτά και τα τοποθετούμε στη σειρά, το ένα μετά το άλλο. Ονομάζουμε την διαδικασία αυτή *διάταξη* των n αντικειμένων ανά k. Για παράδειγμα, αν $n = 3$, $k = 2$ και ονομάσουμε τα αντικείμενα Α, Β και Γ τότε οι δυνατές διατάξεις των 3 αντικειμένων ανά 2 είναι οι

$$AB, \quad A\Gamma, \quad BA, \quad B\Gamma, \quad \Gamma A, \quad \Gamma B.$$

Για το πρώτο αντικείμενο έχουμε 3 επιλογές, ενώ για το δεύτερο, δεδομένου ότι έχουμε ήδη διαλέξει το πρώτο, έχουμε μόνο 2.

Γενικά, όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k αντικείμενα από n διακριτά αντικείμενα με διάταξη, χωρίς επανάληψη είναι

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.1}$$

Πράγματι, για το πρώτο αντικείμενο έχουμε n επιλογές, για το δεύτερο $n-1$, για το τρίτο $n-2$, κ.ο.κ. ενώ για το υπ' αριθμόν k, $n-k+1$.

Παράδειγμα. Ο αριθμός των λέξεων με 3 γράμματα που μπορούμε να φτιάξουμε χρησιμοποιώντας τα 24 γράμματα της Ελληνικής αλφαβήτου αν δεν επιτρέπεται να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο γράμμα δύο φορές είναι $24 \times 23 \times 22 = 12.144$. (Οι «λέξεις» δεν χρειάζεται υποχρεωτικά να έχουν νόημα.)

Παραλλαγές της παραπάνω αρχής μας επιτρέπουν να αντιμετωπίζουμε συναφή προβλήματα: Το πλήθος των ακεραίων από το 1000 ως το 9999 πού δεν έχουν δύο ίδια ψηφία είναι $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4.536$.

1.1.2 Μεταθέσεις

Σημαντική ειδική περίπτωση των διατάξεων χωρίς επανάληψη αποτελούν οι **μεταθέσεις**. Μετάθεση είναι μια σειριακή διάταξη n διακριτών αντικειμένων. Ο συνολικός αριθμός των μεταθέσεων n διακριτών αντικειμένων είναι

$$n! = n(n-1)\cdots 2 \cdot 1.$$

Αυτό προκύπει με τον ίδιο τρόπο όπως και η σχέση (1.1).

Παράδειγματα. Ο αριθμός των μεταθέσεων των χαρτιών της τράπουλας (δηλαδή όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε τα χαρτιά στη σειρά, ή το ένα πάνω στο άλλο) είναι $52! = 8,0658 \cdot 10^{67}$. Παρατηρείστε ότι ο αριθμός είναι αστρονομικά μεγάλος!

Ολοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε 10 βιβλία στη σειρά, σ′ ένα ράφι είναι $10! = 3.628.800$.

Έστω τώρα ότι έχουμε 10 βιβλία εκ των οποίων 5 βιβλία Μαθηματικών, 3 Στατιστικής και 2 Οικονομικών. Ολοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τα βάλουμε στη σειρά σ′ ένα ράφι αν πρέπει όλα τα βιβλία του ίδιου αντικειμένου να είναι μαζί είναι $3! \times 5! \times 3! \times 2! = 8,640$. Ο πρώτος παράγοντας στο γινόμενο αναφέρεται στις μεταθέσεις των γνωστικών αντικειμένων (Μαθηματικά, Στατιστική, Οικονομικά). Οι άλλοι τρεις στις μεταθέσεις των βιβλίων του ιδίου αντικειμένου.

1.1.3 Επαναληπτικές Διατάξεις

Έστω ότι έχουμε n διακριτά είδη αντικειμένων από τα οποία θέλουμε να διαλέξουμε k αντικείμενα και να τα τοποθετήσουμε στη σειρά. Οι επαναλήψεις επιτρέπονται δηλαδή μπορούμε να διαλέξουμε το ίδιο είδος αντικειμένου περισσότερες από μία φορές. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται *επαναληπτική διάταξη* n αντικειμένων ανά k. Για παράδειγμα, από τα γράμματα A, B, Γ μπορούμε να φτιάξουμε τις ακόλουθες «λέξεις» με δύο γράμματα:

$$AA, \ AB, \ A\Gamma, \ BA, \ BB, \ B\Gamma, \ \Gamma A, \ \Gamma B, \ \Gamma\Gamma.$$

Γενικά, ο συνολικός αριθμός επαναληπτικών διατάξεων n διαφορετικών αντικειμένων ανά k είναι

$$n \times n \times \cdots \times n = n^k$$

διότι, εφόσον οι επαναλήψεις επιτρέπονται έχουμε n επιλογές σε κάθε μια από τις k θέσεις της σειράς

Παραδείγματα.

Το πλήθος των δυαδικών αριθμών με n ψηφία, 0 ή 1, είναι 2^n. Το πλήθος των αριθμών με βάση 10 με 4 ψηφία είναι $10^4 = 10.000$. (Οι αριθμοί από το 0 ως το 9.999.)

Το πλήθος των δυνατών αριθμών κυκλοφορίας στην Ελλάδα: Οι αριθμοί κυκλοφορίας έχουν 7 σύμβολα από τα οποία τα τρία πρώτα είναι γράμματα της Ελληνικής αλφαβήτου που είναι και γράμματα της Λατινικής αλφαβήτου ενώ τα τελευταία τέσσερα είναι δεδακικά ψηφία. Άρα τα δυνατά γράμματα είναι A, B, E, Z, H, I, K, M, N, O, P, T, Y, X, που είναι 14. Το συνολικό πλήθος των δυνατών αριθμών κυκλοφορίας είναι $14^3 \times 10^4 = 27.440.000$.

1.1.4 Συνδιασμοί

Συνδιασμοί είναι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k αντικείμενα από n χωρίς διάταξη και χωρίς επανάληψη. Η διαφορά ανάμεσα στους συνδιασμούς και στις διατάξεις (χωρίς επανάληψη) είναι ότι στην περίπτωση των συνδιασμών σημασία έχει ποια αντικείμενα επιλέγουμε αλλά όχι η σειρά τους. Προκειμένου να υπολογίσουμε τον αριθμό των συνδιασμών διαιρούμε τον αριθμό των επιλογών k αντικειμένων από n με διάταξη και στη συνέχεια διαιρούμε με τον αριθμό των μεταθέσεων των k αντικειμένων, δηλαδή με k!. Οι συνδιασμοί n αντικειμένων ανά k δίνονται συνεπώς από την έκφραση

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.2}$$

Παρατηρείστε ότι ισχύει πάντα

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Αυτή η παρατήρηση είναι αλγεβρικά προφανής από τη σχέση (1.2). Έχει όμως και συνδιαστική σημασία: Το να επιλέξουμε k αντικείμενα από τα n είναι ισοδύναμο με το να επιλέξουμε εκείνα τα $n-k$ αντικείμενα που δεν θα επιλέξουμε!

Για παράδειγμα, αν έχουμε τα αντικείμενα Α, Β, Γ, όλοι οι τρόποι που μπορούμε να διαλέξουμε δύο από αυτά χωρίς να παίζει ρόλο η σειρά που τα διαλέγουμε είναι

$$AB, \quad A\Gamma, \quad B\Gamma.$$

Ο αριθμός των συνδιασμών είναι $\binom{3}{2} = 3$.

Παρατηρείστε ότι ο αριθμός των συνδιασμών δίνεται από τον αντίστοιχο διωνυμικό συντελεστή. Έστω Ω ένα σύνολο με n στοιχεία. $\binom{n}{k}$ είναι επίσης ο αριθμός των υποσυνόλων του Ω που περιέχουν k στοιχεία. Πράγματι, προκειμένου να ορίσουμε ένα υποσύνολο του Ω με k στοιχεία αρκεί να επιλέξουμε k συγκεκριμένα στοιχεία από τα n στοιχεία που έχει το Ω και αυτό, όπως είδαμε, γίνεται με $\binom{n}{k}$ διαφορετικούς τρόπους.

$\binom{n}{k}$ είναι επίσης το πλήθος των δυαδικών αριθμών με n δυαδικά ψηφία που έχουν k μονάδες (και επομένως $n-k$ μηδενικά). Βλέπετε την σύνδεση με τον αριθμό των υποσυνόλων; Κάθε θέση από τις n του δυαδικού αριθμού έχει αντιστοιχεί σε ένα στοιχείο του Ω. Αν το ψηφίο στη θέση i είναι 1 τότε το στοιχείο i επιλέγεται για να ανήκει στο υποσύνολο ενώ αν είναι 0 τότε δέν επιλέγεται. Οι δυαδικοί αριθμοί με n ψηφία που έχουν k μονάδες αντιστοιχούν στα υποσύνολα του Ω που έχουν k ψηφία.

Επίσης, $\binom{n}{k}$ είναι ο αριθμός με τον οποίο μπορούμε να διατάξουμε k λευκές και $n-k$ μαύρες μπάλες σε μια γραμμή αν μπάλες του ιδίου χρώματος δεν διακρίνονται μεταξύ τους. (Παρατηρείστε ότι υπάρχει 1 προς 1 αντιστοιχία ανάμεσα σ' αυτές τις διατάξεις και στους δυαδικούς αριθμούς με n ψηφία που έχουν ακριβώς k μονάδες.)

1.1.5 Επαναληπτικές Μεταθέσεις

Είδαμε ότι, όταν έχουμε n διαφορετικά αντικείμενα, όλοι οι τρόποι να τα βάλουμε στη σειρά είναι $n!$. Οι τρόποι αυτοί ονομάζονται μεταθέσεις των n αντικειμένων. Έστω τώρα ότι έχουμε n αντικείμενα που όμως δεν είναι όλα ίδια. Για να εξετάσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ας προσπαθήσουμε να βρούμε όλες τις «λέξεις» που μπορούμε να φτιάξουμε με αναγραμματισμούς της λέξης ΘΑΛΑΣΣΑ. Ας υποθέσουμε για μια στιγμή ότι όλα τα γράμματα είναι διαφορετικά, δηλαδή ότι έχουμε τη λέξη $\Theta A_1 \Lambda A_2 \Sigma_1 \Sigma_2 A_3$. Τότε ασφαλώς θα υπήρχαν 7! αναγραμματισμοί. Όμως, δεδομένου ότι όλα τα Α και όλα τα Σ στη λέξη είναι στην πραγματικότητα ίδια, πρέπει να διαιρέσουμε το 7! με το 2 αφού, π.χ. $\Theta A_1 \Lambda A_2 \Sigma_1 \Sigma_2 A_3 = \Theta A_1 \Lambda A_2 \Sigma_2 \Sigma_1 A_3$ και με το 3! αφού

$$\Theta A_1 \Lambda A_2 \Sigma_1 \Sigma_2 A_3 = \Theta A_2 \Lambda A_3 \Sigma_1 \Sigma_2 A_1 = \cdots$$

(έξι μεταθέσεις των A_1, A_2, A_3 κρατώντας τα άλλα γράμματα σταθερά). Επομένως υπάρχουν συνολικά $\frac{7!}{2!3!} = 420$ διαφορετικοί αναγραμματισμοί.

Στη γενική περίπτωση, έστω ότι έχουμε n αντικείμενα από τα οποία n_1 είναι τύπου 1, n_2 είναι τύπου 2, κλπ. και n_k είναι τύπου k. Τα αντικείμενα που είναι ιδίου τύπου είναι πανομοιότυπα (δεν ξεχωρίζουν μεταξύ τους). Μια *επαναληπτική μετάθεση* είναι ένας τρόπος να βάλουμε στη σειρά αυτά τα αντικείμενα. Το πλήθος των επαναληπτικών μεταθέσεων δίνεται από τον τύπο

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} := \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}, \qquad n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n. \tag{1.3}$$

Το σύμβολο στο αριστερό σκέλος της παραπάνω εξίσωσης ονομάζεται *πολυωνυμικός συντελεστής*. Παρατηρείστε ότι

$$\binom{n}{k, n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

όπου στο δεξιό σκέλος έχουμε τον συνηθισμένο διωνυμικό συντελεστή.

Για παράδειγμα αν έχουμε 3 κόκκινες μπάλες, 2 πράσινες και 4 μπλε (και οι μπάλες που έχουν το ίδιο χρώμα είναι ίδιες) τότε όλοι οι διαφορετικοί τρόποι που μπορούμε να τις βάλουμε στη σειρά είναι $\binom{9}{3,2,4} = \frac{9!}{3!2!4!} = 1.260$.

Όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε 3 πράσινες και 4 κόκκινες μπάλες στη σειρά είναι, με την ίδια λογική, $\binom{7}{3,4} = \frac{7!}{3!4!} = \binom{7}{3}$.

Ο αριθμός των επαναληπτικών μεταθέσεων, $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, είναι επίσης ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να φτιάξουμε k διαφορετικές ομάδες με $n_1, n_2, \ldots, n_k$ μέλη, από ένα σύνολο n ατόμων με $n = n_1 + \cdots + n_k$. Για παράδειγμα, ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να μοιράσουμε 15 τουρίστες σε τρεις ομάδες, μια των 6 ατόμων που θα επισκεφθεί ένα μουσείο, μια των 4 ατόμων που θα επισκεφθεί ένα μνημείο και μια των 5 ατόμων που θα κάνει μια περιήγηση στην πόλη είναι $\binom{15}{6,4,5} = \frac{15!}{6!4!5!} = 630.630$. Για να το καταλάβουμε βλέπουμε ότι η ομάδα που θα επισκεφθεί το μουσείο μπορεί να επιλεγεί με $\binom{15}{6}$ τρόπους από το σύνολο των τουριστών. Στη συνέχεια, από τους 9 τουρίστες που απομένουν, η ομάδα που θα επισκεφθεί το μνημείο φτιάχνεται με $\binom{9}{4}$ τρόπους. Η τελευταία ομάδα είναι απλά αυτοί που περισσεύουν. Συνεπώς, από την πολλαπλασιαστική αρχή, ο συνολικός αριθμός των τρόπων που μπορούμε να φτιάξουμε τις τρείς ομάδες είναι

$$\binom{15}{6}\binom{9}{4} = \frac{15!}{6!9!}\,\frac{9!}{4!5!} = \frac{15!}{6!4!5!} = \binom{15}{6,4,5}.$$

Επίσης, ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων με τους οποίους μπορούμε να βάλουμε στη σειρά 15 μπάλες από τις οποίες 6 είναι κόκκινες, 4 είναι πράσινες και 5 είναι μπλε δίνεται από τον ίδιο αριθμό, $\binom{15}{6,4,5}$. Τυχαίο; Δεν νομίζω! Αριθμούμε τις θέσεις που θα βάλουμε τις μπάλες, από το ένα ως το 15. Οι θέσεις είναι οι τουρίστες. Αν στη θέση $i = 1, \ldots, 15$ βάλουμε κόκκινη μπάλα, ο τουρίστας i θα συμπεριληφθεί στην ομάδα του μουσείου, αν βάλουμε πράσινη στην ομάδα του μνημείου και αν βάλουμε μπλε στην ομάδα της περιήγησης.

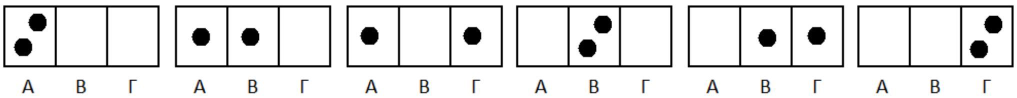
1.1.6 Επαναληπτικοί Συνδιασμοί

Έστω ότι έχουμε n διαφορετικά είδη αντικειμένων. Από αυτά διαλέγουμε k αντικείμενα. Μπορεί να πάρουμε το ίδιο είδος αντικειμένου περισσότερες από μία φορές και η σειρά επιλογής δεν παίζει ρόλο. Αυτό ονομάζεται επαναληπτικός συνδιασμός n ανά k. Για παράδειγμα ας δούμε με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε δύο γράμματα ($k = 2$) από τα A, B, Γ αν η σειρά επιλογής δεν παίζει ρόλο και οι επαναλήψεις επιτρέπονται. Οι δυνατές επιλογές είναι

$$AA,\ AB,\ A\Gamma,\ BB,\ B\Gamma,\ \Gamma\Gamma. \tag{1.4}$$

Προκειμένου να ανακαλύψουμε την γενική μέθοδο υπολογισμού του αριθμού των επαναληπτικών συνδιασμών χρησιμοποιούμε την εικόνα του σχήματος 1.1.6. Θεωρούμε δηλαδή ότι τα τρία γράμματα A,B,Γ, είναι τρία κουτιά. Οι επιλογές μας είναι όμοιες μπάλες και εφόσον οι μπάλες είναι όμοιες το AB σημαίνει ότι τα κουτιά A και B έχουν το καθένα από μία μπάλα χωρίς να έχει σημασία σε ποιο από τα δύο πήγε η πρώτη μπάλα (δηλαδή η πρώτη επιλογή) και σε ποιο η δεύτερη.

Θέλουμε επομένως να βρούμε όλους τους τρόπους που μπορούμε να βάλουμε k όμοιες μπάλες σε n διαφορετικά κουτιά. Ο αριθμός αυτός είναι ίδιος με πλήθος



Σχήμα 1.1: Επαναληπτικοί συνδιασμοί των τριών γραμμάτων Α,Β,Γ, ανά δύο

όλων των δυαδικών λέξεων με k «•» και $n-1$ «|». Ας δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα. Οι επιλογές 2 γραμμάτων από τα Α,Β,Γ που περιγράφονται στην (1.4) κωδικοποιούνται ως

$$\bullet\bullet||,\quad \bullet|\bullet|,\quad \bullet||\bullet,\quad |\bullet\bullet|,\quad |\bullet|\bullet,\quad ||\bullet\bullet.$$

Αν θέλουμε να επιλέξουμε ένα δείγμα μεγέθους 12 από 5 αντικείμενα, έστω τα γράμματα Α,Β,Γ,Δ,Ε, με επανάληψη, τότε $k = 12$, $n = 5$, και η δυαδική λέξη

$$\bullet\bullet\ |\ \bullet\bullet\bullet\bullet\ |\ \bullet\bullet\ |\ \bullet\bullet\bullet\ |\ \bullet$$

κωδικοποιεί την επιλογή ΑΑΒΒΒΒΓΓΔΔΔΕ. (Οι τέσσερεις γραμμές χωρίζουν την ευθεία σε 5 κουτιά δηλαδή πέντε γράμματα μέσα στα οποία τοποθετούμε τις 12 μπάλες δηλαδή τις επιλογές.) Στην γενική περίπτωση υπάρχουν συνολικά

$$\frac{(k+n-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{n+k-1}{k} \tag{1.5}$$

διαφορετικές τέτοιες λέξεις και επομένως αυτό είναι το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να βάλουμε k όμοιες μπάλες σε n διαφορετικά κουτιά.

1.2 Μια Σύνοψη των Παραπάνω Ιδεών στη Γλώσσα της Δειγματοληψίας

Θεωρούμε ένα πληθυσμό μεγέθους n που αποτελείται από διακριτά αντικείμενα. Παίρνουμε ένα δείγμα μεγέθους k. Η δειγματοληψία μπορεί να γίνεται με επανατοποθέτηση του ατόμου στον πληθυσμό ή όχι και η διάταξη του δείγματος μπορεί να μας ενδιαφέρει ή όχι. Ο συνολικός αριθμος των διαφορετικών δειγμάτων που μπορούμε να πάρουμε, ανάλογα με την περίπτωση είναι ως εξής. **1.** Επιλογή k αντικειμένων από n διακριτά αντικείμενα με διάταξη και επανατοποθέτηση:

$$n \times n \times \cdots \times n = n^k. \tag{1.6}$$

2. Επιλογή k αντικειμένων από n διακριτά αντικείμενα με διάταξη, χωρίς επανατοποθέτηση:

$$n(n-1)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1.7}$$

3. Επιλογή k αντικειμένων από n διακριτά αντικείμενα χωρίς διάταξη, χωρίς επανατοποθέτητηση:

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}. \tag{1.8}$$

4. Επιλογή k αντικειμένων από n διακριτά αντικείμενα χωρίς διάταξη, με επανατοποθέτηση:

$$\binom{n+k-1}{k}. \tag{1.9}$$

Για να καταλάβουμε τον παραπάνω τύπο αρκεί να σκεφτούμε τα n διακριτά αντικείμενα σαν κουτιά και τις επιλογές που κάνουμε σαν μπάλες. Αφού οι επιλογή γίνεται με επανατοποθέτηση μπορούμε να βάλουμε περισσότερες από μια μπάλες σε κάθε κουτι. Συνεπώς η απάντηση δίνεται από τον τύπο (1.5).

1.3 Εφαρμογές της Συνδιαστικής Ανάλυσης στον Υπολογισμό Πιθανοτήτων

Ο ορισμός του χώρου πιθανοτήτων και της σύγχρονης έννοιας της Πιθανότητας θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε τον λεγόμενο κλασσικό ορισμό της Πιθανότητας που αποδίδεται στον Laplace (τέλη του 18ου αιώνα). Δεν θα επιμείνουμε σε μια λογικά ακριβή διατύπωσή του αφού ούτως ή άλλως στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε το γενικότερο πλαίσιο του οποίου ο κλασσικός ορισμός αποτελεί ειδική περίπτωση. Θα δούμε όμως συγκεκριμένα παραδείγματα που θα κάνουν την χρήση του ορισμού κατανοητή στην πράξη.

Έστω ένα πείραμα του οποίου τα αποτελέσμα ανήκει σε ένα *πεπερασμένο* σύνολο από *στοιχειώδη ενδεχόμενα*, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Αυτό σημαίνει ότι όταν εκτελέσουμε το πείραμα, ακριβώς ένα από τα ω_i θα συμβεί. Τα στοιχειώδη αυτά ενδεχόμενα θεωρούμε ότι είναι *ισοπίθανα*. Μας ενδιαφέρει η πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου το οποίο είναι ένα υποσύνολο του Ω, π.χ. $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_5\}$. Το σύνθετο ενδεχόμενο A συμβαίνει αν και μόνο αν το αποτέλεσμα του πειράματος είναι ένα *ευνοϊκό στοιχειώδες ενδεχόμενο* δηλαδή ένα από τα $\omega_2, \omega_4, \omega_5$.

Για παράδειγμα, το πείραμα μπορεί να είναι η ρίψη ενός τίμιου ζαριού, και τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, δηλαδή ο αριθμός στην όψη του ζαριού που βλέπει προς τα πάνω. Το σύνθετο ενδεχόμενο μπορεί να είναι $A = \{2, 4, 6\}$, δηλαδή το αποτέλεσμα να είναι άρτιος αριθμος ή $B = \{6\}$ δηλαδή το αποτέλεσμα να είναι 6. (Το σύνθετο ενδεχόμενο μπορεί να αποτελείται από ένα μόνο στοιχειώδες ενδεχόμενο.) Για το A ευνοϊκά στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι τα 2, 4, 6, ενώ για το B ευνοϊκό είναι μόνο το 6.

Η πιθανότητα ενός σύνθετου ενδεχομένου ορίζεται ως ο λόγος

$$\frac{\text{Αριθμός ευνοϊκών στοιχειωδών ενδεχομένων}}{\text{Συνολικός αριθμός στοιχειωδών ενδεχομένων}}.$$

Η παραπάνω διατύπωση δεν αποτελεί ορισμό που μπορεί να αντισταθεί σε προσεκτική λογική εξέταση αφού, σε τελική ανάλυση, χρησιμοποιεί την έννοια «ισοπίθανα» για να ορίσει την έννοια «πιθανότητα», είναι δηλαδή κυκλικός! Αποτελεί όμως μια καλή πρακτική συνταγή για να συνδέσουμε τις τεχνικές της συνδιαστικής ανάλυσης που είδαμε με τον υπολογισμό πιθανοτήτων.

1.3.1 Παραδείγματα εφαρμογής του κλασσικού ορισμού

1. Μια κάλπη περιέχει 10 μαύρες και 15 λευκές μπάλες. Ανασύρω στην τύχη 5 μπάλες μαζί και παρατηρώ το χρώμα τους. Ποιά είναι η πιθανότητα από τις μπάλες που πήρα οι 3 να είναι μαύρες και οι 2 λευκές; Όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορώ να διαλέξω 3 μαύρες μπάλες από 10 είναι 10 choose3. Όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορώ να διαλέξω 2 λευκές μπάλες από τις 15 που υπάρχουν στην κάλπη είναι $\binom{15}{2}$. Άρα όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορώ να διαλέξω 3 μαύρες και 2 λευκές μπάλες είναι $\binom{10}{3}\binom{15}{2}$. Αυτός είναι ο αριθμός των ευνοϊκών στοιχειωδών ενδεχομένων. Ο συνολικός αριθμός ενδεχομένων είναι ο αριθμός των τρόπων που μπορώ να πάρω 5 μπάλες από το σύνολο των 25 που υπάρχουν στην κάλπη που είναι $\binom{25}{5}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι

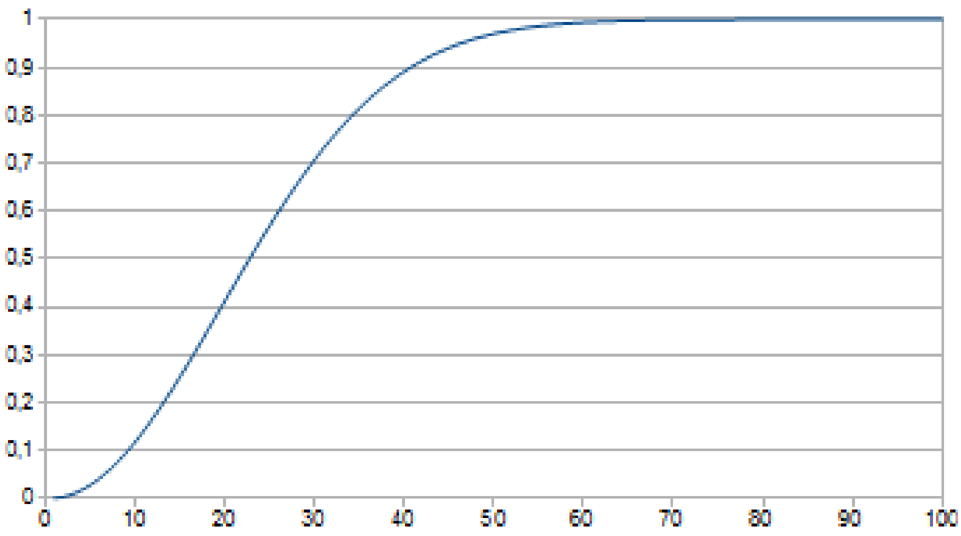
$$\frac{\binom{10}{3}\binom{15}{2}}{\binom{25}{5}} = 0,2372.$$

2. *Το πρόβλημα των γεννεθλίων.* Αν έχουμε n ανθρώπους σε μια αίθουσα ποια είναι η πιθανότητα να μην υπάρχουν δύο από αυτούς που να έχουν γεννέθλια την ίδα μέρα; Υποθέτουμε ότι ο χρόνος έχει 365 μέρες και οι γεννήσεις είναι εξίσου πιθανές οποιαδήποτε μέρα του χρόνου.

Λύση: Για να συμβεί το ενδεχόμενο που μας ενδιαφέρει πρέπει όλοι οι άνθρωποι να έχουν γεννηθεί σε διαφορετικές μέρες. Για τον πρώτο έχουμε 365 επιλογές, για τον δεύτερο 364 (αφού πρέπει να μην έχει γεννηθεί την ίδια μέρα με τον πρώτο), για τον τρίτο 363, κ.ο.κ. Συνεπώς όλοι οι τρόποι με τους οποίους συμβαίνει το ευνοϊκό ενδεχόμενο είναι

$$365(365-1)(365-2)\cdots(365-n+1).$$

Αφ΄ ετέρου όλοι οι δυνατοί τρόποι να έχουν γεννέθλεια n άνθρωποι είναι 365^n (επαναληπτικές διατάξεις!). Συνεπώς, η πιθανότητα που μας ενδιαφέρει είναι το



Σχήμα 1.2: Το πρόβλημα των γεννεθλίων

πηλίκο των δύο

$$\pi_n := \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right)\left(1 - \frac{3}{365}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{365}\right).$$

Η πιθανότητα να υπάρχουν δύο άνθρωποι με κοινά γεννέθλια ανάμεσα στους n είναι $1 - \pi_n$. (Αυτό το ενδεχόμενο συμπεριλαμβάνει π.χ. το ενδεχόμενο τρεις να έχουν γεννέθλια την ίδια μέρα και δύο άλλοι να έχουν κοινά γεννέθλια κάποια άλλη μέρα. Είναι το συμπλήρωμα του ενδεχομένου να έχουν όλοι διαφορετικά γεννέθλια.) Το διάγραμμα δείχνει την πιθανότητα αυτή, $1-\pi_n$, σαν συνάρτηση του n.

Για $n = 23$ η πιθανότητα να υπάρχουν τουλαχιστον 2 άνθρωποι ανάμεσα στους 23 είναι περίπου 51%. Με 41 ανθρώπους η πιθανότητα κοινών γεννεθλίων είναι 90%!

3. Από μια τράπουλα με 52 χαρτιά διαλέγω πέντε στην τύχη (εννοείται χωρίς επανατοποθέτηση). Ποια είναι η πιθανότητα να έχω καρρέ του άσσου δηλαδή τέσσερεις άσσους και ένα οποιοδήποτε άλλο χαρτί;

Οι τέσσερεις άσσοι διαλέγονται με ένα μόνο τρόπο. Το πέμπτο χαρτί με 48 τρόπους. Άρα τα ευνοϊκά ενδεχόμενα είναι 48 ενώ το σύνολο των ενδεχομένων είναι όλοι οι τρόποι που μπορώ να διαλέξω 5 χαρτιά από τα 52, δηλαδή $\binom{52}{5}$.

Συνεπώς η πιθανότητα για το καρρέ του άσσου είναι

$$\frac{48}{\binom{52}{5}} = \frac{5!}{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49} = 1,8469 \times 10^{-5}.$$

4. Ποια είναι η πιθανότητα να έχω φουλ της ντάμας με οκτάρια δηλαδή τρεις οποιεσδήποτε ντάμες και δύο οποιαδήποτε οκτάρια; Ποια είναι η πιθανότητα να έχω φουλ δηλαδή τρία ίδια χαρτιά (ντάμες, ρηγάδες, άσσους, κλπ.) και άλλα δύο διαφορετικά βεβαίως από τα τρία αλλά ίδια μεταξύ τους (οκτάρια, βαλέδες κλπ.);

Για το πρώτο ερώτημα, οι τρόποι να διαλέξω τρεις ντάμες από τις τέσσερεις είναι βεβαίως $\binom{4}{3} = 4$. Οι τρόποι να διαλέξω δύο οκτάρια από τα τέσσερα είναι $\binom{4}{2} = 6$. Συνεπώς η πιθανότητα για το συγκεκριμένο φουλ είναι

$$\frac{4 \cdot 6}{\binom{52}{5}} = 9.2345 \times 10^{-6}.$$

Η πιθανότητα να έχω ένα οποιοδήποτε φουλ υπολογίζεται ως εξής. Όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορώ να διαλέξω το είδος του χαρτιού από το οποίο θα έχω τρία ίδια, αν δηλαδή θα είναι άσσος, δύο, κλπ. είναι 13. Όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορώ να διαλέξω το είδος του χαρτιού από το οποίο θα έχω δύο ίδια, αφού έχω διαλέξει το πρώτο είδος, είναι δώδεκα. Μετά από αυτή την επιλογή ισχύει ο προηγούμενος υπολογισμός και η πιθανότητα είναι

$$\frac{13 \cdot 12 \cdot \binom{4}{3}\binom{4}{2}}{\binom{52}{5}} = 0,0014.$$

5. Ποια είναι η πιθανότητα να έχω ζεύγη, δηλαδή δύο χαρτιά του ίδιου είδους (π.χ. δύο άσσους) δύο άλλα χαρτιά του ίδιου είδους, αλλά διαφορετικού από το πρώτο ζεύγος (π.χ. δύο δεκάρια) και ένα πέμπτο χαρτί διαφορετικού είδους από τα άλλα (π.χ. επτά).

Πρώτα θα δούμε τους τρόπους να διαλέξουμε το είδος των δύο ζευγών. Είναι $\binom{13}{2} = \frac{13 \cdot 12}{2}$ (και όχι $13 \cdot 12$!– η κατάσταση εδώ είναι συμμετρική, σε αντίθεση με το φουλ). Αφού διαλέξαμε τα ζεύγη, π.χ. δυο άσσοι και δυο δεκάρια, οι τρόποι να διαλέξουμε δυο άσσους από τους τέσσερεις είναι $\binom{4}{2}$ και το ίδιο για τα δεκάρια. Τέλος, μένουν 44 χαρτιά για την επιλογή του πέμπτου χαρτιού που δεν ανήκει στα ζεύγη. Η πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}\binom{4}{2}44}{\binom{52}{5}} = 0,0475.$$

6. Τέλος ας δούμε την πιθανότητα να έχουμε ένα μόνο ζεύγος, δηλαδή δυο χαρτιά του ίδιου είδους (π.χ. δυο ντάμες) και όλα τα άλλα χαρτιά να είναι διαφορετικού είδους τόσο μεταξύ τους όσο και από το είδος του ζεύγους (π.χ. οκτώ, δέκα και ρήγας). Το είδος του ζεύγους μπορούμε να το διαλέξουμε με 13 τρόπους. Αφού διαλέξουμε το είδος του ζεύγους διαλεγουμε και 3 είδη για τα τρία χαρτιά που μένουν με $\binom{12}{3}$ τρόπους. (Παρατηρείστε ότι αν διαλέξουμε πρώτα το είδος των τριών χαρτιών αυτό γίνεται με $\binom{13}{3}$ τρόπους και στη συνέχεια έχουμε 10 τρόπους για να διαλέξουμε το είδος του ζεύγους. Αυτό είναι φυσικά εξ ίσου σωστό αφού $13\binom{12}{3} = \binom{13}{3}10$.) Αφού διαλέξουμε το είδος του ζεύγους, π.χ. ντάμες, έχουμε $\binom{4}{2}$ τρόπους να διαλεξουμε δύο ντάμες από τις τέσσερεις, ενώ για καθένα από τα υπόλοιπα τρία χαρτιά έχουμε $\binom{4}{1} = 4$ τρόπους επιλογής. Η πιθανότητα ενός μόνο ζεύγους είναι συνεπώς

$$\frac{13\binom{12}{3}\binom{4}{2}4^3}{\binom{52}{5}} = 0,4226.$$

7. Σε μία κάλπη υπάρχουν 10 λευκές μπάλες 5 μαύρες και 5 κόκκινες. Ανασύρω 6 χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχω 2 λευκές 2 μαύρες και 2 κόκκινες; Ποιά είναι η πιθανότητα να μην έχω καμία λευκή;

Για το πρώτο ερώτημα, όλοι οι δυνατοί τρόποι να πάρω 2 λευκές από 10 είναι $\binom{10}{2}$, όλοι οι τρόποι να πάρω 2 μαύρες από 5 είναι $\binom{5}{2}$, και το ίδιο ισχύει για τις κόκκινες. Όλοι οι τρόποι να πάρω 6 μπάλες από τις 20 που υπάρχουν στην κάλπη είναι $\binom{20}{6}$. Επομένως, η πρώτη ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{10}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{2}}{\binom{20}{6}} = 0,1161.$$

Για τον δεύτερη ζητούμενη πιθανότητα ο αριθμός των ευνοϊκών στοιχειωδών ενδεχομένων είναι $\binom{10}{6}$, δηλαδή όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε μη λευκές μπάλες και η πιθανότητα είναι

$$\frac{\binom{10}{6}}{\binom{20}{6}} = 0,0054.$$

8. Σε μια κάλπη έχουμε 3 λευκές και 3 μαύρες μπάλες. Τις ανασύρουμε μια-μια και τις βάζουμε στη σειρά καθώς βγαίνουν. Ποιά είναι η πιθανότητα να είναι όλες οι λευκές μπάλες μαζί; Εδώ τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι οι επαναληπτικές μεταθέσεις των έξι αντικειμένων που ανήκουν σε δύο ομάδες των τριών (τα αντικείμενα στην ίδια ομάδα είναι ίδια). Άρα, όλα τα δυνατά ενδεχόμενα είναι $\binom{6}{3} = 20$. Τα ευνοϊκά ενδεχόμενα είναι τα

$$\Lambda\Lambda\Lambda MMM, \quad M\Lambda\Lambda\Lambda MM, \quad MM\Lambda\Lambda\Lambda M, \quad MMM\Lambda\Lambda\Lambda,$$

δηλαδή 4. Άρα η πιθανότητα είναι $4/20 = 1/5$.

1.4 Ασκήσεις

1.4.1. *Πέντε υπουργοί ανταλλάσσουν χειραψίες, όλοι με όλους. Πόσες χειραψίες ανταλλάσσονται συνολικά;*
Απ. 10.

1.4.2. *4 άνθρωποι διαλέγονται στην τύχη από 5 ζευγάρια. Ποιά είναι η πιθανότητα να επιλεγούν 2 άνδρες και 2 γυναίκες;*
Απ. $\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{10}{21}$.

1.4.3. *Με πόσους τρόπους μπορούμε να διαλέξουμε άτομα από μια ομάδα 10 υποψηφίων για να σχηματίσουμε μια εξαμελή επιτροπή; Το ίδιο ερώτημα αν πρόκειται να σχηματίσουμε δύο τριμελείς επιτροπές (με διαφορετικές αρμοδιότητες η κάθε μία).*
Απ. α) $\binom{10}{6}$, *β)* $\binom{10}{3}\binom{7}{3}$.

1.4.4. *Με πόσους τρόπους μπορούμε να βάλουμε σε ένα ράφι 5 βιβλία πιθανοτήτων, 4 βιβλία στατιστικής και 3 βιβλία οικονομικών αν βιβλία του ιδίου αντικειμένου πρέπει να είναι τοποθετημένα μαζί;*
Απ. $3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 3!$.

1.4.5. *Σε ένα κουτί με 12 αυγά τα 2 είναι χαλασμένα. Διαλέγουμε 4 στην τύχη για να φτιάξουμε ομελέττα. Ποιά είναι η πιθανότητα να μη διαλέξουμε κανένα χαλασμένο αυγό;*
Απ. $\frac{\binom{10}{4}}{\binom{12}{4}} = 0,4242$.

1.4.6. *Διαλέγουμε 5 χαρτιά από μια τράπουλα. Ποιά είναι η πιθανότητα να διαλέξουμε τουλάχιστον ένα χαρτί από κάθε είδος (σπαθί, μπαστούνι, καρό, κούπα).*
Απ. $\frac{4\binom{13}{2}\binom{13}{1}\binom{13}{1}\binom{13}{1}}{\binom{52}{5}}$.

1.5 Χειρισμός Αθροισμάτων

Το άθροισμα n αριθμών a_i, $i = 1, 2, \ldots$, το συμβολίζουμε ως

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i. \tag{1.10}$$

Στη Θεωρία Πιθανοτήτων συχνά προκύπτει η ανάγκη να εξετάσουμε και αθροίσματα απείρου (αλλά αριθμήσιμου) πλήθους αριθμών:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Για τα αθροίσματα αυτά (που είναι άπειρες σειρές) ισχύουν όσα έχουμε μάθει στον Μαθηματικό Λογισμό. Ιδιαίτερο ρόλο παίζουν η γεωμετρική πρόοδος και η γεωμετρική σειρά. Αν $a \in \mathbb{R}$ τότε

$$1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \tag{1.11}$$

και

$$1 + a + a^2 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a^i = \frac{1}{1 - a} \qquad \text{αν } |a| < 1. \tag{1.12}$$

Αλλαγές δεικτών επιτρέπουν χειρισμούς με ταχύτητα και ακρίβεια. Για παράδειγμα

$$\sum_{i=1}^{n} a^i = \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} = \sum_{i=0}^{n-1} a a^i = a \sum_{i=0}^{n-1} a^i = a \frac{1 - a^n}{1 - a}.$$

1.5.1 Διπλά Αθροίσματα

Συχνά προκύπτει επίσης η ανάγκη να περιγράψουμε συνοπτικά το άθροισμα ενός συνόλου αριθμών που μας δίνεται υπό την μορφή ενός πίνακα με m γραμμές και n στήλες. Για παράδειγμα αν έχουμε τους αριθμούς a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3, 4$, όπως δίδονται από τον παρακάτω πίνακα

$i \setminus j$	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6

τότε το άθροισμά τους είναι $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{4} a_{ij} = 32$. Η εναλλαγή της σειράς άθροισης επιτρέπεται πάντα (λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης) σ′ ένα πεπερασμένο διπλό άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}.$$

Για άπειρα αθροίσματα τα πράγματα είναι πιο περίπλοκα, εδώ όμως θα αρκεστούμε στο γεγονός ότι η εναλλαγή της σειράς άθροισης επιτρέπεται πάντα και σε άπειρα αθροίσματα όταν όλα τα a_{ij} είναι μη αρνητικά.

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} \qquad \text{όταν } a_{ij} \geq 0.$$

Εκτός από την εναλλαγή της σειράς άθροισης ένας άλλος, ιδιαίτερα χρήσιμος μετασχηματισμός ενός διπλού αθροίσματος είναι η 'διαγώνια άθροιση'. Αν θέσουμε $k = i + j$ τότε

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} a_{k-j,j}.$$

Στο αριστερό σκέλος προσθέτουμε πρώτα όλα τα στοιχεία της πρώτης γραμμής, μετά όλα τα στοιχεία της δεύτερης κ.ο.κ. Στο δεξιό προσθέτουμε διαγώνια. Δηλαδή

$$a_{00} + (a_{10} + a_{01}) + (a_{20} + a_{11} + a_{02}) + (a_{30} + a_{21} + a_{12} + a_{03}) + \cdots .$$

Το άθροισμα μέσα στην τελευταία παρένθεση φαίνεται και στο ακόλουθο διάγραμμα.

$$\begin{array}{cccccc}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & \boxed{a_{03}} & a_{04} & \cdots \\
a_{10} & a_{11} & \boxed{a_{12}} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\
a_{20} & \boxed{a_{21}} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\
\boxed{a_{30}} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots \\
a_{40} & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Ως εφαρμογή της διαγώνιας άθροισης υπολογίζουμε το διπλό άθροισμα $\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x^{i+j}$ όπου $|x| < 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x^{i+j} &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=0}^{k} 1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k \qquad (1.13)
\end{aligned}$$

Θα δούμε στης επόμενη παράγραφο πώς υπολογίζεται το τελευταίο αυτό άθροισμα.

1.5.2 Δυναμοσειρές και οι εφαρμογές τους στον υπολογισμό αθροισμάτων

Όπως έχουμε δει στον Μαθηματικό Λογισμό *δυναμοσειρά* είναι μια έκφραση της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ όπου $\{a_n\}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών και $x \in \mathbb{R}$ μια πραγματική μεταβλητή. Η δυναμοσειρά μπορεί να συγκλίνει για κάποιες ή για όλες τις τιμές του x στους πραγματικούς. Για παράδειγμα, αν $a_n = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε η δυναμοσειρά που παίρνουμε είναι η γνωστή μας γεωμετρική σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{για } |x| < 1. \tag{1.14}$$

(Η δυναμοσειρά αυτή συγκλίνει για όλα τα x στο $(-1, 1)$.) Ισχύει ότι μια δυναμοσειρά μπορεί να παραγωγισθεί όρο προς όρο μέσα στο (ανοικτό) διάστημα που συγκλίνει. Συνεπώς, παραγωγίζοντας και τα δύο σκέλη της (1.14) ως προς x παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{1.15}$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει την δυνατότητα να υπολογίσουμε το άθροισμα που συναντήσαμε στην (1.13) της προηγουμένης παραγράφου. Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) x^k &= \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} \qquad (\text{θέτοντας } k = n-1) \\ &= \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

(Η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (1.15) λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι ο πρώτος όρος στο άπειρο άθροισμα της (1.15) δηλαδή ο όρος για $n = 0$ συνεισφέρει 0.)

Παραγωγίζοντας άλλη μια φορά την (1.15) παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \tag{1.16}$$

ή ισοδύναμα

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) x^n = \frac{2}{(1-x)^3}. \tag{1.17}$$

(η δεύτερη ισοδύναμη μορφή προκύπτει γράφοντας $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2}$ αφού οι δυο πρώτοι όροι του αθροίσματος μηδενίζονται και μετά κάνοντας την αλλαγή του δείκτη από n σε $m = n+2$. Βέβαια, στο τελικό άθροισμα γράψαμε πάλι n! Όπως και στις μεταβλητές ολοκλήρωσης οι αλλαγές συνήθως γίνονται νοερά.)

Παραγωγίζοντας την δυναμοσειρά (1.14) k φορές ως προς x παίρνουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k} = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}.$$

Το δεξί μέλος μπορεί να γραφεί και ως $\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$ αφού οι όροι για $n = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ μηδενίζονται. Διαιρώντας και τα δύο μέλη με k! και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$ έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k}{k} x^m = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Η τελευταία αυτή σχέση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} x^m = \frac{1}{(1-x)^k} \qquad \text{για κάθε } |x| < 1 \text{ και } k \in \mathbb{N}. \tag{1.18}$$

1.5.3 Γινόμενα Αθροισμάτων

Για το γινόμενο των δύο αθροισμάτων $\sum_{i=1}^{m} a_i$ και $\sum_{j=1}^{n} b_j$ ισχύει, λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, ότι

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j.$$

(Αν δεν είναι προφανές δοκιμάστε το $(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)$.) Το ίδιο ισχύει και για άπειρα αθροίσματα (τουλάχιστον όταν όλοι οι όροι είναι θετικοί).

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} a_i b_j. \tag{1.19}$$

Ας δούμε το ακόλουθο παράδειγμα. Αν $x, y \in [0,1)$ τότε $(1-x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$ και $(1-y)^{-1} = \sum_{j=1}^{\infty} y^j$. Πολλαπλασιάζοντας έχουμε

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=0}^{\infty} x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} y^j\right) &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} x^i y^j = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} x^{k-j} y^j \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{j=0}^{k} \left(\frac{y}{x}\right)^j = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{1-(y/x)^{k+1}}{1-(y/x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}-y^{k+1}}{x-y} \\
&= \frac{1}{x-y}\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} y^{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{x-y}\left(\frac{x}{1-x} - \frac{y}{1-y}\right) = \frac{1}{(1-x)(1-y)}.
\end{aligned}
$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα ήταν γνωστό εκ των προτέρω. Όμως οι παραπάνω χειρισμοί δείχνουν πώς πολλαπλασιάζουμε άπειρα αθροίσματα και στη συνέχεια πώς εφαρμόζουμε την διαγώνια πρόσθεση.

1.6 Συνδιασμοί, Διωνυμικό Θεώρημα και Διωνυμικοί συντελεστές

1.6.1 Διωνυμικοί συντελεστές και το τρίγωνο του Pascal

Οι διωνυμικοί συντελεστές ορίζονται ως

$$
\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}, \qquad \begin{aligned} &n = 0,1,2,\ldots, \\ &k = 0,1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{1.20}
$$

Όταν $k > n$ *τότε* $\binom{n}{k} = 0$ *ενώ* $\binom{n}{0} = 1$ *(επειδή* $0! = 1$*).* Είναι εύκολο να δείξουμε ότι

$$
\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{1.21}
$$

Πράγματι, το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης γράφεται ως

$$
\begin{aligned}
\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k}\right) \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}\,\frac{n}{k(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!}
\end{aligned}
$$

και η τελευταία σχέση ισούται με το αριστερό μέλος της (1.21).

Λογω της (1.21) οι διωνυμικοί συντελεστές μπορούν να υπολογισθούν από το τρίγωνο του Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & \\
 & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & \\
1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1
\end{array}
$$

1.6.2 Το διωνυμικό θεώρημα

Θεώρημα 1. *Για κάθε* $a, b \in \mathbb{R}$ *και για κάθε* $n \in \mathbb{N}$ *ισχύει ότι*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{1.22}$$

Η απόδειξη μπορεί να γίνει με Μαθηματική Επαγωγή όπως είδαμε στον Μαθηματικό Λογισμό Ι. Για να καταλάβουμε την συνδιαστική σημασία του θεωρήματος μπρούμε να γράψουμε

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b)$$

όπου το γινόμενο στα δεξιά θα έχει n παράγοντες. Όταν κάνουμε τους πολλαπλασιασμούς είναι φανερό ότι θα εμφανισθεί ένα άθροισμα όρων της μορφής $a^k b^{n-k}$ για κάθε τιμή του k από 0 ως n. Θα υπάρχει μόνο ένας όρος b^n γιατί θα πρέπει να διαλέξουμε το b n φορές. Όμως θα υπάρχουν n όροι ab^{n-1} γιατί έχουμε n επιλογές για τον παράγοντα που θα συνεισφέρει το a. Όλοι οι άλλοι παράγοντες συνεισφέρουν b. Όμοια, θα υπάρχουν $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ όροι $a^2 b^{n-2}$ γιατί μπορούμε να διαλέξουμε με $\frac{n(n-1)}{2}$ τρόπους τους δύο παράγοντες που θα συνεισφέρουν a από τους n παράγοντες που έχουμε συνολικά. Γενικά, ο αριθμός των όρων $a^k b^{n-k}$ είναι ο αριθμός των τρόπων που μπορούμε να διαλέξουμε k παράγοντες που θα συνεισφέρουν a από τους n παράγοντες του γινομένου, και αυτός είναι $\binom{n}{k}$.

1.7 Ταυτότητες για τους διωνυμικούς συντελεστές

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε την βασική αναδρομική σχέση (1.21) την οποία αποδείξαμε αλγεβρικά. Αξίζει όμως να πεισθούμε ότι ισχύει βλέποντάς την και με συνδιαστικό τρόπο. Έστω $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ένα σύνολο με n στοιχεία. Ο αριθμός των υποσυνόλων του με k στοιχεία είναι $\binom{n}{k}$. Ξεχωρίζουμε ένα στοιχείο, έστω το a_1, και μετράμε όλα τα υποσύνολα του Ω με k στοιχεία *που περιέχουν το* a_1. Το πλήθος τους είναι $\binom{n-1}{k-1}$ επειδή, αφού το a_1 έχει ήδη επιλεγεί, μας μένει να επιλέξουμε $k-1$ επιπλέον στοχεία από $n-1$ συνολικά. Ας μετρήσουμε τώρα και όλα τα υποσύνολα του Ω με k στοιχεία που *δεν περιέχουν το* a_1. Αυτά είναι $\binom{n-1}{k}$ (αφού πρέπει να διαλέξουμε k από $n-1$ δεδομένου ότι το a_1 δεν συμμετέχει). Άρα

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Μια άλλη χρήσιμη ταυτότητα για τους διωνυμικούς συντελεστές είναι

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}. \tag{1.23}$$

Και αυτή μπορεί να αποδειχθεί εύκολα χρησιμοποιώντας την (1.20). Είναι όμως ενδιαφέρον να την καταλάβουμε υπολογίζοντας με δύο διαφορετικές μεθόδους όλους τους δυνατούς τρόπους που μπορούμε να επιλέξουμε από n άτομα μια επιτροπή k ατόμων μαζί με τον πρόεδρό της. (Ο πρόεδρος είναι και μέλος της επιτροπής.) Η πρώτη μέθοδος είναι να επιλέξουμε πρώτα τα όλα τα μέλη της επιτροπής. Αυτό γίνεται με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Στη συνέχεια, διαλέγουμε ένα από τα μέλη της επιτροπής για πρόεδρο. Αυτό γίνεται με k τρόπους. Άρα η πρώτη μέθοδος δίνει το αριστερό μέλος της (1.23).

Η δεύτερη μέθοδος είναι να επιλέξουμε πρώτα τον πρόεδρο από τα n άτομα. Αυτό προφανώς γίνεται με n τρόπους. Στη συνέχεια διαλέγουμε τα υπόλοιπα $k-1$ μέλη της επιτροπής από τα $n-1$ άτομα που απέμειναν. Αυτό γίνεται με $\binom{n-1}{k-1}$ τρόπους. Το γινόμενο μας δίνει το δεξί μέλος της (1.23).

Γενικεύοντας, βλέπουμε ότι ισχύει η ακόλουθη ταυτότητα.

$$\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m} \qquad \text{για } 0 \leq m \leq k \leq n. \tag{1.24}$$

Θα την αποδείξουμε χρησιμοποιώντας ένα διαφορετικό παράδειγμα. Έχουμε n παιδιά. Σε m από αυτά θα δώσουμε δύο δώρα, σε $k-m$ θα δώσουμε μόνο ένα δώρο, και στα υπόλοιπα $n-k$ δεν θα δώσουμε τίποτε ($0 \leq m \leq k \leq n$). Διαλέγουμε k παιδιά από τα n και τους δίνουμε ένα δώρο. Αυτό γίνεται με $\binom{n}{k}$ τρόπους. Από τα k αυτά παιδιά που πήραν ένα δώρο διαλέγουμε m και τους δίνουμε ένα επιπλέον δώρο. Αυτό γίνεται με $\binom{k}{m}$ τρόπους. Το γινόμενο είναι το αριστερό σκέλος της (1.24).

Θα μπορούσαμε όμως να διαλέξουμε m παιδιά από τα n και να τους δώσουμε δύο δώρα. Αυτό γίνεται με $\binom{n}{m}$ τρόπους. Στη συνέχεια διαλέγουμε $k-m$ παιδιά από τα $n-m$ που έμειναν και τους δίνουμε μόνο ένα δώρο. Αυτό γίνεται με $\binom{n-m}{k-m}$ τρόπους. Το γινόμενο είναι το δεξί σκέλος της (1.24).

1.7.1 Η ταυτότητα Vandermonde

Η ταυτότητα αυτή είναι η

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k} \tag{1.25}$$

και μπορεί να δικαιολογηθεί ως εξής. Το δεξιό μέλος της (4.9) θα μπορούσε να είναι ο αριθμός των επιτροπών k ατόμων που μπορούν να επιλεγούν από $n+m$ άτομα, n από τα οποία είναι άνδρες και m γυναίκες. Στο αριστερό μέλος $\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$ είναι ο συνολικός αριθμός των επιτροπών που αποτελούνται από i άνδρες και $k-i$ γυναίκες. Αθροίζοντας ως προς τον αριθμό των ανδρών που θα περιέχει η επιτροπή παίρνουμε την ταυτότητα. (Παρατηρείστε ότι στο δεξί μέλος μετράμε όλες τις δυνατές επιτροπές, ασχέτως από τον αριθμό ανδρών που θα περιέχουν.)

Στην περίπτωση που το $k \geq \min(m, n)$ κάποιοι από τους όρους του αθροίσματος στο αριστερό σκέλος της (1.25) θα είναι μηδέν. Ας δούμε το εξής συγκεκριμένο παράδειγμα: $m = 2$, $n = 4$ και $k = 3$. Το αριστερό σκέλος της (1.25) είναι

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3} \binom{4}{i}\binom{2}{3-i} &= \binom{4}{0}\binom{2}{3} + \binom{4}{1}\binom{2}{2} + \binom{4}{2}\binom{2}{1} + \binom{4}{3}\binom{2}{0} \\ &= 1\cdot 0 + 4\cdot 1 + 6\cdot 2 + 4\cdot 1 = 20\end{aligned}$$

Ο λόγος για τον οποίο π.χ. $\binom{2}{3} = 0$ είναι ότι $\binom{2}{3} = \frac{2(2-1)(2-2)}{3!} = \frac{2\cdot1\cdot0}{6} = 0$. Αυτό είναι και το νόημα της παρατήρησης που ακολουθεί την εξίσωση (1.20), ότι

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{αν } k > n. \tag{1.26}$$

Το δεξί σκέλος της (1.25) στο παράδειγμά μας είναι

$$\binom{2+4}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6\cdot5\cdot4}{3!} = 20.$$

Ένας άλλος τρόπος για να καταλάβουμε το νόημα της (1.25) είναι να υπολογίσουμε τον συντελεστή του x^k στο πολυώνυμο

$$(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{m+n}.$$

Από το διωνυμικό θεώρημα η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^j = \sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την απλή αλλά σημαντική παρατήρηση (1.26) μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση ως

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} x^i \sum_{j=0}^{\infty} \binom{m}{j} x^j = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+n}{k} x^k. \tag{1.27}$$

Τα παραπάνω αθροίσματα δεν είναι στην πραγματικότητα άπειρα αφού όλοι οι επιπλέον όροι που φαινομενικά έχουμε εισάγει είναι μηδενικοί. Εκτελώντας τον πολλαπλασιασμό στο αριστερό σκέλος της παραπάνω εξίσωσης και εφαρμόζοντας διαγώνια πρόσθεση ($i + j = k$) έχουμε

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{i} \binom{m}{j} x^{i+j} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}. \tag{1.28}$$

Συγκρίνοντας τα δεξιά μέλη των (1.27) και (1.28) προκύπτει η (1.25).

1.8 Το Πολυωνυμικό Θεώρημα

Το πολυωνυμικό θεώρημα είναι γενίκευση του διωνυμικού όταν έχουμε περισσότερες από δύο μεταβλητές. Είναι δηλαδή μια συμβολική περιγραφή, με τις μεθόδους της συνδιαστικής ανάλυσης του αποτελέσματος αναπτυγμάτων της μορφής π.χ. $(a + b + c)^5$. Οπλισμένοι με λίγη υπομονή θα μπορούσαμε να βρούμε το συγκεκριμένο ανάπτυγμα που θα είχε όρους της μορφής a^5, ab^2c^2 και ούτω καθ΄ εξής, πολλαπλασιασμένους με κατάλληλους συντελεστές. Για παράδειγμα ο συντελεστής του ab^2c^2 θα είναι 30. Πώς όμως το βρίσκουμε αυτό; Ποιός είναι ο γενικός τύπος; Η απάντηση δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\{(n_1,n_2,\ldots,n_m):\sum_{i=1}^{m} n_i = n\}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}. \tag{1.29}$$

όπου

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!}$$

και το άθροισμα λαμβάνεται πάνω σε όλα τα διανύσματα $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ με συνιστώσες στο $\mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με n.

Για να καταλάβουμε την ιδέα ας δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα.

$$(a + b + c)^5 = (a + b + c)(a + b + c)(a + b + c)(a + b + c)(a + b + c)$$

και επομένως ο όρος ab^2c^2 προκύπτει αν διαλέξουμε από ένα παράγοντα το a, απο δύο το b και από τους άλλους δύο το c. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει όμως αυτό; Με όσους διαφορετικούς τρόπους μπορώ να βάλω στη σειρά τα σύμβολα abbcc. Αυτές είναι ασφαλώς επαναληπτικές μεταθέσεις! Αν τα 5 σύμβολα ήταν όλα διαφορετικά η απάντηση θα ήταν 5!. Όμως τα δύο b είναι ίδια και τα δύο c επίσης επομένως η απάντηση θα είναι $\frac{5!}{2!2!} = \binom{5}{1,2,2}$.

Στην γενική περίπτωση της (1.29) θα έχουμε το γινόμενο n παραγόντων $(x_1 + \cdots + x_n)$ που θα έχει όρους της μορφής $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ με $n_1 + n_2 + \cdots n_m = n$ και $n_i = 0, 1, 2, \ldots$. Ο αριθμός των διαφορετικών τρόπων που μπορούμε να βάλουμε στη σειρά n_1 x_1, n_2, κ.ο.κ. είναι βεβαίως $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ και έτσι αποδεικνύεται ο (1.29).

Ένας άλλος, ισοδύναμος τρόπος να βρούμε τον συντελεστή του $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}$ είναι ο εξής. Όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε τους n_1 παράγοντες που θα συνεισφέρουν x_1 στο γινόμενο από τους n παράγοντες που έχουμε συνολικά είναι $\binom{n}{n_1}$. Από τους $n - n_1$ παράγοντες που απομένουν, όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε τους n_2 που θα συνεισφέρουν x_2 στο γινόμενο είναι $\binom{n-n_1}{n_2}$. Όμοια, όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε τους n_3 που θα συνεισφέρουν x_3, από τους $n - n_1 - n_2$ που απομένουν μετά και την δεύτερη επιλογή είναι $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$. Συνεχίζοντας έτσι, για το x_{m-1} έχουμε $\binom{n-n_1-\cdots-n_{m-2}}{n_{m-1}}$. Αυτή είναι και η τελευταία επιλογή. Οι n_m παράγοντες που θα συνεισφέρουν x_m στο γινόμενο είναι απλά όσοι έχουν απομείνει. Συνεπώς όλοι οι δυνατοί τρόποι δίδονται από το γινόμενο

$$
\begin{aligned}
&\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\cdots-n_{m-2}}{n_{m-1}} \\
&= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\,\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\,\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots n_{m-2})!}{n_{m-1}!(n-n_1-\cdots n_{m-2}-n_{m-1})!} \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{m-1}!(n-n_1-\cdots n_{m-2}-n_{m-1})!} \\
&= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_{m-1}!n_m!} = \binom{n}{n_1, \ldots, n_m},
\end{aligned}
$$

όπου, στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$.

Κεφάλαιο 2

Πιθανότητες σε πεπερασμένους χώρους

2.1 Πεπερασμένος χώρος πιθανοτήτων

Νόμοι του De Morgan. Αν A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι υποσύνολα ενός συνόλου Ω και αν με A^C συμβολίζουμε το συμπλήρωμα ενός υποσυνόλου του Ω τότε

1. $\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)^C = \bigcap_{i=1}^n A_i^C$,
2. $\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^C = \bigcup_{i=1}^n A_i^C$.

Απόδειξη του πρώτου νόμου:

$$x \in (\cup_{i=1}^n A_i)^C \;\Leftrightarrow\; x \notin \cup_{i=1}^n A_i \;\Leftrightarrow\; x \notin A_i\,, \forall i \;\Leftrightarrow\; x \in A_i^C\,, \forall i \;\Leftrightarrow\; x \in \cap_{i=1}^n A_i^C.$$

Ο δεύτερος νόμος αποδεικνύεται ανάλογα ή, εναλλακτικά, εφαρμόζοντας τον πρώτο νόμο στα σύνολα A_i^C και στη συνέχεια παίρνοντας συμπληρώματα.

Ορισμός 1. *Μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω, $\mathscr{A}$ ονομάζεται* άλγεβρα *(ή πεδίο) αν ικανοποιεί τα εξής*

1. $\Omega \in \mathscr{A}$,
2. *Αν* $A \in \mathscr{A}$ *τότε και* $A^C \in \mathscr{A}$,
3. *Αν* $A, B \in \mathscr{A}$ *τότε* $A \cup B \in \mathscr{A}$.

Μερικές συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι εξής:

Αν $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$ τότε $\cup_{i=1}^n A_i$. (Αποδεικνύεται επαγωγικά.)

Αν $A, B \in \mathscr{A}$ τότε και $AB := A \cap B \in \mathscr{A}$. Πράγματι $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C \in \mathscr{A}$ από τους νόμους του de Morgan και τα άρθρα 2. και 3. του ορισμού της άλγεβρας.

Συνέπεια του παραπάνω είναι ότι αν $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$, τότε $\cap_{i=1}^n A_i$.

Ορισμός 2 (Προσωρινός). *Θα ονομάζουμε* μέτρο πιθανότητας *πάνω σε μια άλγεβρα* $\mathscr{A}$ *του δειγματικού χώρου* Ω *μια συνάρτηση* $P : \mathscr{A} \to [0, 1]$ *τέτοια ώστε*

1. $P(\Omega) = 1$,

2. Για κάθε $A \in \mathscr{A}$, $P(A^C) = 1 - P(A)$,

3. Για κάθε $A, B \in \mathscr{A}$ *με* $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Μερικές συνέπειες του παραπάνω ορισμού είναι οι ακόλουθες:

1. Δεδομένου ότι $\emptyset \cap \Omega = \emptyset$ από το άρθρο 3. του ορισμού έχουμε $P(\emptyset \cup \Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$ ή $P(\Omega) = P(\emptyset) + P(\Omega)$, από το οποίο συνάγουμε ότι $P(\emptyset) = 0$.

2. Αν $A_i \in \mathscr{A}$, $i = 1, 2, \dots, n$, με $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, τότε

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

3. Για οποιαδήποτε $A, B \in \mathscr{A}$ ισχύει ότι $A \cup B = AB^C \cup AB \cup A^C B$ όπου τα τρία σύνολα AB^C, AB και $A^C B$ είναι ξένα μεταξύ τους. Συνεπώς

$$P(A \cup B) = P(AB^C \cup AB \cup A^C B) = P(AB^C) + P(AB) + P(A^C B). \quad (2.1)$$

   Αλλά $AB^C \cup AB = A$, συνεπώς $P(AB^C) + P(AB) = P(A)$. Ομοίως, $A^C B \cup AB = A$, συνεπώς $P(A^C B) + P(AB) = P(B)$. Από τις δύο αυτές σχέσεις και την (2.1) προκύπτει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \quad (2.2)$$

4. Με τον ίδιο τρόπο προκύπτει ότι

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC). \quad (2.3)$$

2.2 Ανεξαρτησία, Δεσμευμένη Πιθανότητα και το Θεώρημα του Bayes

Ορισμός 3. *Δύο ενδεχόμενα* A, B *ονομάζονται ανεξάρτητα αν*

$$P(AB) = P(A)P(B). \tag{2.4}$$

Αν $P(B) > 0$*, η δεσμευμένη πιθανότητα του* A *δεδομένου του* B *ορίζεται ως*

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{2.5}$$

Θεώρημα 2 (Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας). *Έστω* A_i, $i = 1, 2, \dots, n$*, μια διαμέριση του δειγματικού χώρου,* Ω*, δηλαδή* $A_i \cap A_j = \emptyset$*,* $i \neq j$*, και* $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$*. Τότε*

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(BA_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i). \tag{2.6}$$

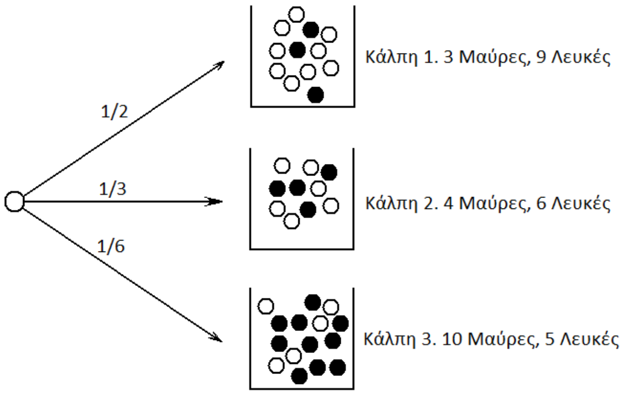
Απόδειξη. Τα σύνολα BA_i, $i = 1, 2, \dots, n$, είναι ξένα μεταξύ τους και $\cup_{i=1}^{n} BA_i = B$. Από την προσθετικότητα του μέτρου πιθανότητας σε ξένα σύνολα προκύπτει η πρώτη ισότητα της (2.6), ενώ η δεύτερη προκύπτει χρησιμοποιώντας την (2.5). □

Θεώρημα 3 (Θεώρημα του Bayes). *Αν* A_i, $i = 1, 2, \dots, n$ *είναι μια διαμέριση του* Ω *(δηλαδή* $A_i \cap A_j = \emptyset$*, όταν* $i \neq j$*, και* $\cup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$*) τότε*

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B|A_j)P(A_j)}. \tag{2.7}$$

Παράδειγμα 1. Έστω 3 κάλπες, όμοιες ως προς την εξωτερική εμφάνιση. Η κάλπη 1 έχει 3 μαύρες και 9 λευκές μπάλες, η κάλπη 2 έχει 4 μαύρες και 6 λευκές, ενώ η κάλπη 3 έχει 10 μαύρες και 5 λευκές. Επιλέγουμε στην τύχη μια από τις τρεις. Ο μηχανισμός επιλογής δίνει πιθανότητα 1/2 να επιλέξουμε την πρώτη, 1/3 να επιλέξουμε την δεύτερη και 1/6 να επιλέξουμε την τρίτη. Γνωρίζουμε αυτές τις πιθανότητες, καθώς και την σύνθεση των καλπών αλλά δεν γνωρίζουμε πια κάλπη επιλέξαμε. α) Ποιά είναι η πιθανότητα, αν τραβήξουμε δυό μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση, να είναι και οι δύο μαύρες; β) Τραβάμε δύο μπάλες και είναι και οι δύο μαύρες. Ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει την κάλπη i, $i = 1, 2, 3$;

Λύση α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα ολικής πιθανότητας. B είναι το ενδεχόμενο να τραβήξουμε δυο μαύρες μπάλες ενώ A_i η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει την



Σχήμα 2.1: Παράδειγμα 1. Θεώρημα του Bayes

κάλπη i.

$$P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} \frac{1}{2} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{1}{3} + \frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}} \frac{1}{6} = 0.1386$$

β) Από το θεώρημα του Bayes έχουμε

$$\begin{aligned}
P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{\frac{\binom{3}{2}}{\binom{12}{2}} \frac{1}{2}}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{0.0227}{0.1386} = 0.1640 \\
P(A_2|B) &= \frac{P(B|A_2)P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} \frac{1}{3}}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{0.0444}{0.1386} = 0.3207 \\
P(A_3|B) &= \frac{P(B|A_3)P(A_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{\frac{\binom{10}{2}}{\binom{15}{2}} \frac{1}{6}}{\sum_{i=1}^{3} P(B|A_i)P(A_i)} = \frac{0.0714}{0.1386} = 0.5154
\end{aligned}$$

Οι τρεις δεσμευμένες πιθανότητες που υπολογίσαμε αθροίζονται φυσικά στη μονάδα. Η μικρή παρέκλιση που φαίνεται να υπάρχει οφείλεται σε λάθη στρογγύλευσης στα τέσσερα δεκαδικά ψηφία.

2.3 Διαδοχικές Δεσμεύσεις

Αν B_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι οποιαδήποτε ενδεχόμενα ισχύει πάντα ότι

$$P(B_1 B_2 \cdots B_n) = P(B_1|B_2 B_3 \cdots B_n)P(B_2|B_3 \cdots B_n) \cdots P(B_{n-1}|B_n)P(B_n). \tag{2.8}$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει εφαρμόζοντας διαδοχικά τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας. Για παράδειγμα $\mathsf{P}(\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\mathsf{B}_3) = \mathsf{P}(\mathsf{B}_1|\mathsf{B}_2\mathsf{B}_3)\mathsf{P}(\mathsf{B}_2\mathsf{B}3)$. Αλλά $\mathsf{P}(\mathsf{B}_2\mathsf{B}_3) = \mathsf{P}(\mathsf{B}_2|\mathsf{B}_3)\mathsf{P}(\mathsf{B}_3)$ και συνεπώς $\mathsf{P}(\mathsf{B}_1\mathsf{B}_2\mathsf{B}_3) = \mathsf{P}(\mathsf{B}_1|\mathsf{B}_2\mathsf{B}_3)\mathsf{P}(\mathsf{B}_2|\mathsf{B}_3)\mathsf{P}(\mathsf{B}_3)$. Σε πολλές περιπτώσεις οι δεσμευμένες πιθανότητες είναι εύκολο να υπολογιστού.

Παράδειγμα 1. Έστω μια κάλπη με 10 λευκές και 5 μαύρες μπάλες. Ανασύρουμε διαδοχικά, χωρίς επανατοποθέτηση 3 μπάλες. Ποια είναι η πιθανότητα η πρώτη να είναι λευκή, η δεύτερη να είναι μαύρη και η τρίτη να είναι λευκή;

Έστω A το ενδεχόμενο η πρώτη μπάλα να είναι λευκή, B το ενδεχόμενο η δεύτερη να είναι μαύρη και C το ενδεχόμενο η τρίτη να είναι λευκή. Είναι εύκολο να δούμε ότι $\mathsf{P}(\mathsf{A}) = 10/15 = 2/3$. Επίσης $\mathsf{P}(\mathsf{B}|\mathsf{A}) = 5/14$. Αυτό ισχύει γιατί, δεδομένου ότι η πρώτη μπάλα ήταν λευκή, όταν ανασύρουμε την δεύτερη μπάλα υπάρχουν 9 λευκές και 5 μαύρες. Τέλος $\mathsf{P}(\mathsf{C}|\mathsf{BA}) = 9/13$ γιατί όταν ανασύρουμε την τρίτη, δεδομένου του A και του B, υπάρχουν 9 λευκές και 4 μαύρες μπάλες στην κάλπη. Συνεπώς

$$\mathsf{P}(\mathsf{ABC}) = \mathsf{P}(\mathsf{A})\mathsf{P}(\mathsf{B}|\mathsf{A})\mathsf{P}(\mathsf{C}|\mathsf{AB}) = \frac{10}{15}\frac{5}{14}\frac{9}{13}.$$

2.4 Παραδείγματα

2.4.1. *Τι είναι πιο πιθανό, τουλάχιστον ένα εξάρι σε 6 διαδοχικές ρίψεις ενός ζαριού ή τουλάχιστον δύο εξάρια σε 12 διαδοχικές ρίψεις; Επίσης, συγκρίνατε τις πιθανότητες να φέρει κανείς τουλάχιστον μια φορά άσσο σε τέσσερεις ρίψεις ενός ζαριού με την πιθανότητα να φέρει τουλάχιστον ένα διπλό άσσο ρίχνοντας ένα ζευγάρι από ζάρια 24 φορές.*
Τουλάχιστον ένα έξι σε 6 ρίψεις: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 = 0.6651$.
Τουλάχιστον δύο έξι σε 12 ρίψεις: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 - 12\left(\frac{5}{6}\right)^{11}\frac{1}{6} = 0.6187$.
Τουλάχιστον έναν άσο σε 4 ρίψεις: $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0.5177$.
Τουλάχιστον έναν διπλό άσο σε 24 ρίψεις: $1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{12} = 0.8761$.

2.4.2. *Παίρνουμε μια καλά ανακατεμένη τράπουλα και ανοίγουμε τα χαρτιά ένα-ένα. Ποιά είναι η πιθανότητα οι τέσσερεις άσσοι της τράπουλας να εμφανιστούν διαδοχικά;*
Απ. $\frac{49!}{52!} = 7.54 \cdot 10^{-6}$

2.4.3. *Μια κάλπη περιέχει 20 λευκά και 10 μαύρα σφαιρίδια. Διαλέγουμε 6 σφαιρίδια στην τύχη χωρίς επανατοποθέτηση. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρουμε 4 λευκά και 2 μαύρα; Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρουμε 2 λευκά και τέσσερα* *μαύρα;*

Απ. $\mathsf{P}(\textit{4 λευκά, 2 μαύρα}) = \dfrac{\binom{20}{4}\binom{10}{2}}{\binom{30}{6}}, \qquad \mathsf{P}(\textit{2 λευκά, 4 μαύρα}) = \dfrac{\binom{20}{2}\binom{10}{4}}{\binom{30}{6}}.$

2.4.4. *Ένα κιβώτιο περιέχει 100 λαμπτήρες από τους οποίους οι δέκα είναι χαλασμένοι. Διαλέγουμε δέκα λαμπτήρες στην τύχη. Ποιά είναι η πιθανότητα τουλάχιστον οκτώ από αυτούς να λειτουργούν;*

Απ. $\mathsf{P}(\textit{8, 9 ή 10 λειτουργούν}) = \dfrac{\binom{90}{8}\binom{10}{2} + \binom{90}{9}\binom{10}{1} + \binom{90}{10}\binom{10}{0}}{\binom{100}{10}}.$

Κεφάλαιο 3

Τυχαίες Μεταβλητές και Διακριτές Κατανομές

3.1 Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές: Κατανομή, Μέση Τιμή και Διασπορά

Ορισμός 4. *Έστω* $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ *χώρος πιθανοτήτων. Μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στους φυσικούς,* $\mathbb{N}_0$ *(συμπεριλαμβανομέου και του μηδενός) είναι μια* συνάρτηστη $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ *τέτοια ώστε, για κάθε* $n \in \mathbb{N}_0$, $\{\omega : X(\omega) = n\} \in \mathscr{A}$.

Για παράδειγμα έστω $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ και $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, δηλαδή το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Ω. Έστω επίσης P μέτρο πιθανότητας στο $\mathscr{A}$ με $P(A) = |A|/6$ όπου, ως συνήθως $|A|$ είναι ο πληθικός αριθμός του A δηλαδή το σύνολο των στοιχείων του. Αυτό σημαίνει για παράδειγμα ότι $P(\{\omega_i\}) = 1/6$ για $i = 1, 2, \ldots, 6$. Η συνάρτηση $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ που ορίζεται ως $X(\omega_i) = i$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Το ίδιο ισχύει και για την συνάρτηση $Y : \Omega \to \mathbb{N}_0$ που ορίζεται ως

$$Y(\omega_i) = \begin{cases} 1 & \text{αν } i = 1, 3, 5, \\ 0 & \text{αν } i = 2, 4, 6. \end{cases}$$

Ο χώρος πιθανοτήτων που συζητάμε θα μπορούσε να περιγράφει το πείραμα της ρίψης ενός τιμίου ζαριού. Η τυχαία μεταβλητή X είναι το αποτέλεσμα που βλέπουμε όταν ρίχνουμε το ζάρι. Η U είναι μονάδα αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι περιττός αριθμός και 0 αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι άρτιος.

Για να καταλάβουμε καλύτερα τον ορισμό, παρ΄ ότι δεν θα συναντήσουμε τέτοια παραδείγματα σε άλλα σημεία σ΄ αυτές τις σημειώσεις, ας θεωρήσουμε το ίδιο σύνολο Ω αλλά ας θέσουμε $\mathscr{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}, \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}\}$. Το μέτρο πιθανότητας P περιορίζεται τώρα στο καινούργιο πεδίο ως $P(\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}) =$

$P(\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}) = 1/2$, $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$. Ο χώρος πιθανοτήτων θα μπορούσε να περιγράφει τη ρίψη ενός τίμιου ζαριού από κάποιον που μας πληροφορεί μόνο αν το αποτέλεσμα είνα περιττό ή άρτιο και τίποτε άλλο. Η Y όπως ορίστηκε πιο πάνω είναι τυχαία μεταβλητή ενώ η X δεν είναι.

Έστω X τυχαία μεταβλητή με τιμές στους φυσικούς αριθμούς, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. Οι στατιστικές της ιδιότητες προσδιορίζονται από την κατανομή της, δηλαδή τις πιθανότητες $p_k := P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ισχύει βεβαίως ότι $\sum_k p_k = 1$. Η *μέση τιμή* της X ορίζεται ως

$$EX = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k. \tag{3.1}$$

Γενικότερα, αν $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, η μέση τιμή της $g(X)$ δίδεται από την

$$Eg(X) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) p_k. \tag{3.2}$$

Συγκεκριμένα, αν $g(x) = x^2$, η ποσότητα EX^2 ονομάζεται δεύτερη ροπή της X και δίδεται από τη σχέση $E[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k$. Αν $\mu := EX$ η *διασπορά* της X ορίζεται ως

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &:= E[(X-\mu)^2] = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\mu)^2 p_k = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - 2\mu k + \mu^2) p_k && (3.3) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - 2\mu \sum_{k=0}^{\infty} k p_k + \mu^2 \sum_{k=0}^{\infty} p_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \mu^2. && (3.4) \end{aligned}$$

Έχουμε συνεπώς την εναλλακτική έκφραση $\mathrm{Var}(X) = E[X^2] - (EX)^2$. Η ποσότητα $\sigma := \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ ονομάζεται *τυπική απόκλιση*.

Η ποσότητα $EX(X-1)$ (παραγοντική ροπή δεύτερης τάξης) είναι συχνά ευκολότερο να υπολογιστεί. Δεδομένου ότι

$$\begin{aligned} EX(X-1) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k = \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k) p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \\ &= \mathrm{Var}(X) + (EX)^2 - EX, && (3.5) \end{aligned}$$

από την ποσότητα αυτή και την μέση τιμή εύκολα υπολογίζεται και η διασπορά με τη βοήθεια της (3.5) ως

$$\mathrm{Var}(X) = EX(X-1) + EX - (EX)^2. \tag{3.6}$$

3.2 Η διωνυμική κατανομή

Μια τυχαία μεταβλητή X είναι διωνυμικά κατανεμημένη με παραμέτρους (n, p) (με $n \in \mathbb{N}$ και $p \in [0, 1]$) αν

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n \tag{3.7}$$

όπου $q = 1 - p$. *Η X μπορεί να θεωρηθεί ως ο συνολικό αριθμός των επιτυχιών σε n ανεξάρτητες επαναλήψεις ενός πειράματος με πιθανότητα επιτυχίας p.* Ισχύει βεβαίως λόγω του διωνυμικού θεωρήματος ότι

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ = \ (p+q)^n \ = \ 1. \tag{3.8}$$

Η μέση τιμή της X δίνεται από την σχέση

$$EX = \sum_{k=0}^{n} kP(X = k) \ = \ \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ = \ \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{3.9}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας τη σχέση

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

η (3.9) γράφεται ως

$$EX = \sum_{k=1} n \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} \tag{3.10}$$

Θέτοντας $k - 1 = m$, το τελευταίο άθροισμα γράφεται ως

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{(n-1)-(k-1)} &= \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} p^m q^{(n-1)-m} = (p+q)^{n-1} \\ &= 1^{n-1} = 1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Από τις (3.10) και (3.11) προκύπτει ότι

$$EX = np. \tag{3.12}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την διασπορά της X θα υπολογίσουμε πρώτα την παραγοντική ροπή δεύτερης τάξης

$$E[X(X-1)] \ = \ \sum_{k=0}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \ = \ \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \binom{n}{k} p^k q^{n-k}. \tag{3.13}$$

Σ' αυτό το σημείο υπενθυμίζουμε την ταυτότητα

$$\binom{k}{2}\binom{n}{k} = \binom{n}{2}\binom{n-2}{k-2}$$

που είναι ειδική περίπτωση της (1.24) για $m = 2$ και από την οποία προκύπτει ότι

$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}.$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση αυτή στην (3.13) έχουμε

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2}p^k q^{n-k} = n(n-1)p^2\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}p^{k-2}q^{n-2-(k-2)} \\ &= n(n-1)p^2\sum_{m=0}^{n-2}\binom{n-2}{m}p^m q^{n-2-m} = n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} \\ &= n(n-1)p^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε την διασπορά της διωνυμικής κατανομής ως εξής

$$\mathrm{Var}(X) = E[X(X-1)]+EX-(EX)^2 = n(n-1)p^2+np-n^2p^2 = -np^2+np = npq. \tag{3.15}$$

Παράδειγμα 1. Έστω ότι ρίχνουμε ένα τίμιο νόμισμα 10 φορές. Η πιθανότητα να έχουμε 3 «κορώνες» και 7 «γράμματα» είναι $\binom{10}{3}(\frac{1}{2})^3(\frac{1}{2})^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{1}{2^{10}} = \frac{120}{1024} = 0,1172.$

Παράδειγμα 2. Έστω ότι ρίχνουμε ένα τίμιο ζάρι 6 φορές. Η πιθανότητα να φέρουμε τουλάχιστον ένα εξάρι μπορεί να υπολογισθεί ως εξής. Θεωρούμε ότι το πείραμα, δηλαδή η ρίψη του ζαριού έχει δύο δυνατά αποτελέσματα. Το ένα είναι «εξάρι» με πιθανότητα 1/6 και το άλλο είναι «όχι εξάρι» με πιθανότητα 5/6. Έστω X ο συνολικός αριθμός των εξαριών στις έξι ρίψεις. Με βάση τα παραπάνω η X είναι διωνυμική τυχαία μεταβλητή με πιθανότητα επιτυχίας 1/6 και αριθμό δοκιμών 6. Η ζητούμενη πιθανότητα, να έχουμε τουλάχιστον ένα εξάρι είναι ίση με $1 - P(X = 0) = 1 - \binom{6}{0}(\frac{1}{6})^0(\frac{5}{6})^6 = 1 - (\frac{5}{6})^6 = 0,8062.$

Παράδειγμα 3. Μια κάλπη περιέχει 100 μπάλες 70 από τις οποίες είναι λευκές και 30 μαύρες. Ανασύρω μια μπάλα, παρατηρώ το χρώμα της και την επανατοποθετώ στην κάλπη. Επαναλαμβάνω το πείραμα 10 φορές. Ποιά είναι η πιθανότητα να παρατηρήσω 3 ή περισσότερες μαύρες μπάλες;

Δεδομένου ότι επανατοποθετώ τις μπάλες στην κάλπη, ο αριθμός των μαύρων μπαλών στο δείγμα των δέκα, X, είναι διωνυμικός με πιθανοτητα επιτυχίας 3/10. Αντί να υπολογίσουμε την $P(X \geq 3)$ θα υπολογίσουμε πρώτα την

$$\begin{aligned} P(X<3) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) \\ &= \binom{10}{0}\left(\frac{3}{10}\right)^0\left(\frac{7}{10}\right)^{10} + \binom{10}{1}\left(\frac{3}{10}\right)^1\left(\frac{7}{10}\right)^9 + \binom{10}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^8 \\ &= 0,000011 + 0,006979 + 0,013459 = 0,020449. \end{aligned}$$

Επομένως $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 0,979551$.

3.3 Η γεωμετρική κατανομή

Μια τυχαία μεταβλητή X είναι γεωμετρικά κατανεμημένη με παράμετρο p (όπου $p \in (0,1]$) αν

$$p_k = pq^{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots . \tag{3.16}$$

όπου, ως συνήθως $q = 1 - p$. *Η X μπορεί να θεωρηθεί ως ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται μέχρι την πρώτη επιτυχία σε ανεξάρτητες επαναλήψεις ενός πειράματος με πιθανότητα επιτυχίας* p. Το άθροισμα των πιθανοτήτων που δίδονται απο την (3.16) ισούται βέβαια με την μονάδα:

$$\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} \;=\; p\sum_{m=0}^{\infty} q^m \;=\; \frac{p}{1-q} \;=\; 1. \tag{3.17}$$

Η μέση τιμή της γεωμετρικής κατανομής μπορεί να υπολογισθεί ως εξής

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kpq^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} \\ &= p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την διασπορά, υπολογίζουμε πρώτα την δεύτερη παραγοντική ροπή, $EX(X-1)$ ως εξής.

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)pq^{k-1} = pq\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)q^{k-2} = pq\frac{2}{(1-q)^3} = \frac{2q}{p^2}. \tag{3.19}$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{Var}(X) = E[X(X-1)] + EX - (EX)^2 = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q + p - 1}{p^2} = \frac{q}{p^2}. \tag{3.20}$$

Μερικές φορές μπορεί να μας ενδιαφέρει ο αριθμός των *αποτυχιών* μέχρι την πρώτη επιτυχία ο οποίος είναι φυσικά μικρότερος κατά 1 από τον συνολικό αριθμό δοκιμών. Αν Y είναι *ο αριθμός των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία* τότε η κατανομή του Y δίνεται από την σχέση

$$P(Y = k) = (1-p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Η κατανομή του Y ονομάζεται συχνά επίσης γεωμετρική αλλά συνήθως αυτή τη ασάφεια δεν δημιουργεί προβλήματα εφ' όσον δίνονται οι απαραίτητες διευκρινήσεις. Παρατηρείστε ότι σ' αυτή την περίπτωση το μηδέν έχει θετική πιθανότητα. Αφού $Y = X - 1$ θα ισχύει ότι $EY = EX - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$ και $\mathrm{Var}(Y) = E[(Y - EY)^2] = E[(X - 1 - EX + 1)^2] = E[(X - EX)^2] = \mathrm{Var}(X)$.

Παράδειγμα 1. Έχουμε δύο νομίσματα τα οποία έχουν πανομοιότυπη εμφάνιση. Το ένα είναι δίκαιο ενώ το άλλο φέρνει κορώνα με πιθανότητα 1/3 και γράμματα με πιθανότητα 2/3. Διαλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη αγνοώντας για ποιό από τα δύο πρόκειται. Ποιά είναι η πιθανότητα να χρειασθούν n ρίψεις του νομίσματος μέχρι να παρατηρήσουμε την πρώτη κορώνα; Δεδομένου ότι χρειάσθηκαν 10 ρίψεις για να δούμε την πρώτη κορώνα, ποιά είναι η πιθανότητα να έχουμε διαλέξει το δίκαιο νόμισμα;

Έστω A το ενδεχόμενο να έχουμε διαλέξει το δίκαιο νόμισμα και A^C το συμπλήρωμά του. Αν X είναι ο αριθμός των ρίψεων μέχρι την πρώτη κορώνα τότε $P(X = 10|A) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ (γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας 1/2), ενώ $P(X = 10|A^C) = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^9$.

Η πιθανότητα να χρειαστούν 10 ρίψεις για την πρώτη κορώνα είναι, από το νόμο της ολικής πιθανότητας,

$$P(X = 10) = P(X = 10|A)P(A) + P(X = 10|A^C)P(A^C) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^9\frac{1}{2}.$$

Από το θεώρημα του Bayes έχουμε

$$\begin{aligned} P(A|X = 10) &= \frac{P(X = 10|A)P(A)}{P(X = 10|A)P(A) + P(X = 10|A^C)P(A^C)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^9\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{2^{19}}{3^{10}}} = 2,0086 \times 10^{-4}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2. Έστω X, Y, δύο ανεξάρτητες, γεωμετρικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια πιθανότητα επιτυχίας, p. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(X > Y)$.

Δεσμεύοντας ως προς την τιμή της Y έχουμε, από το θεώρημα ολικής πιθανότητας

$$P(X > Y) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X > Y|Y = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X > k|Y = k)P(Y = k).$$

Αφού οι X και U είναι ανεξάρτητες ισχύει ότι

$$P(X > k|Y = k) = \frac{P(X > k, Y = k)}{P(Y = k)} = \frac{P(X > k)P(Y = k)}{P(Y = k)} = P(X > k).$$

Επίσης,

$$P(X > k) = \sum_{l=k+1}^{\infty} pq^{l-1} = pq^k \sum_{l=k+1}^{\infty} q^{l-k-1} = pq^k \sum_{m=0}^{\infty} q^m = pq^k \frac{1}{1-q} = q^k.$$

Συνεπώς,

$$P(X > Y) = \sum_{k=1}^{\infty} q^k pq^{k-1} = pq \sum_{k=1}^{\infty} q^{2(k-1)} = \frac{pq}{1-q^2} = \frac{pq}{(1+q)(1-q)} = \frac{q}{1+q}.$$

Λόγω συμμετρίας ισχύει βεβαίως και ότι $P(Y > X) = \frac{q}{1+q}$, και συνεπώς

$$P(X = Y) = 1 - 2\frac{q}{1+q} = \frac{p}{1+q}.$$

Αν $p = q = 1/2$ η παραπάνω σχέση δίνει $P(X = Y) = 1/3$.

3.4 Η Αρνητική Διωνυμική Κατανομή ή Κατανομή Pascal

Μια γενίκευση της γεωμετρικής κατανομής προκύπτει αν εξετάσουμε τον αριθμό των επαναλήψεων X που απαιτείται σε ένα ανεξάρτητα επαναλαμβανόμενο πείραμα που έχει πιθανότητα επιτυχίας p και αποτυχίας $q = 1 - p$ έως ότου καταγράψουμε r επιτυχίες. Η κατανομή της τ.μ. X δίνεται από τον τύπο

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} q^{n-r} p^r, \qquad n = r, r+1, r+2, \ldots. \tag{3.21}$$

Η κατανομή αυτή ονομάζεται *αρνητική διωνυμική ή Pascal*. Η παραπάνω έκφραση για την κατανομή Pascal μπορεί να εξαχθεί από το εξής συνδυαστικό επιχείρημα: Προκειμένου να χρειασθούν n δοκιμές για r επιτυχίες θα πρέπει οι πρώτες $n - 1$ δοκιμές να περιέχουν $r - 1$ επιτυχίες (ανεξαρτήτως σειράς) και η δοκιμή n να είναι υποχρεωτικά επιτυχία. Η πιθανότητα για το πρώτο ενδεχόμενο δίνεται από τον τύπο της διωνυμικής ως

$$\binom{n-1}{r-1} q^{(n-1)-(r-1)} p^{r-1}$$

ενώ η πιθανότητα του δευτέρου ενδεχομένου (που είναι ανεξάρτητο από το πρώτο) είναι p. Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις δύο πιθανότητες προκύπτει η (3.21).

Είναι εύκολο να επαληθεύσουμε ότι οι πιθανότητες στην (3.21) αθροίζονται στη μονάδα.

$$\sum_{n=r}^{\infty} \binom{n-1}{r-1} q^{n-r} p^r = p^r \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+r-1}{r-1} q^l = p^r \frac{1}{(1-q)^r} = 1,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη (1.18) και την αλλαγή δείκτη $l = n - r$.

Από τον ορισμό της αρνητικής διωνυμικής κατανομής έχουμε $X = Y_1 + Y + 2 + \cdots + Y_r$ όπου Y_i είναι *ανεξάρτητες γεωμετρικές τυχαίες μεταβλητές* με πιθανότητα επιτυχίας p. Συνεπώς, ο μέσος και η διασπορά της αρνητικής διωνυμικής κατανομής μπορεί να υπολογισθεί ως

$$\begin{aligned} \mathsf{E}X &= \mathsf{E}[Y_1 + \cdots + Y_r] = \frac{r}{p} && (3.22) \\ \mathsf{Var}(X) &= \mathsf{Var}(Y_1 + \cdots + Y_r) = r\frac{q}{p^2}. && (3.23) \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Έστω X ο αριθμός ρίψεων ενός δίκαιου ζαριού που απαιτείται μέχρι να παρατηρήσουμε το τρίτο εξάρι. Ποιά είναι η κατανομή του X; Συγκεκριμένα, ποιά είναι η πιθανότητα $\mathsf{P}(X = 10)$; Υπολογίστε επίσης την μέση τιμή και την διασπορά της X.

Η κατανομή του X είναι αρνητική διωνυμική με $r = 3$, $p = 1/6$ και $p = 5/6$. Θα έχουμε

$$\mathsf{P}(X = n) = \binom{n-1}{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}\left(\frac{1}{6}\right)^3, \qquad n = 3, 4, \ldots.$$

Για $n = 10$, $\mathsf{P}(X = 10) = \binom{9}{3}\frac{5^7}{6^{10}}$. Επίσης, από τις (3.22) και (3.23), $\mathsf{E}X = 3(1/6)^{-1} = 18$, $\mathsf{Var}(X) = 90$.

3.5 Ομοιόμορφη κατανομή

Θεωρούμε μια τυχαία μεταβλητή X ομοιόμορφα κατανεμημένη στους φυσικούς από το 1 έως και το n, δηλαδή στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, n-1, n\}$. Η ομοιομορφία εν προκειμένω σημαίνει ότι όλα τα στοιχειώδη ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, δηλαδή ότι

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{αν } k = 1, 2, \ldots, n, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \tag{3.24}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά υπολογίζονται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες εκφράσεις για το άθροισμα των n πρώτων φυσικών και των τετραγώνων τους:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k &= 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n+1) && (3.25) \\ \sum_{k=1}^{n} k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \qquad \forall n \in \mathbb{N}. && (3.26) \end{aligned}$$

Η μέση τιμή της ομοιόμορφης τυχαίας μεταβλητής, X, υπολογίζεται ως εξής.

$$\mathsf{E}X = \sum_{k=1}^{n} k\mathsf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{n+1}{2}. \tag{3.27}$$

Η δεύτερη ροπή υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} \mathsf{E}X^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2\mathsf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Τέλος, η διασπορά δίδεται από την σχέση $\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}X^2 - (\mathsf{E}X)^2$ και με βάση τις (3.27), (3.28) είναι

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}(X) &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{1}{12}(2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2) \\ &= \frac{1}{12}(n^2-1). \end{aligned} \tag{3.29}$$

Ως παράδειγμα, ας εξετάσουμε το αποτέλεσμα της ρίψης ενός τίμιου ζαριού το οποίο είναι μια ομοιόμορφη τυχαία μεταβλητή, X, στο σύνολο $\{1,2,3,4,5,6\}$. Η μέση τιμή και η διασπορά είναι

$$\mathsf{E}X = \frac{1}{2}(6+1) = 3,5, \qquad \mathsf{Var}(X) = \frac{1}{12}(6^2-1) = 2,9167. \tag{3.30}$$

3.6 Η υπεργεωμετρική κατανομή

Η κατανομή αυτή περιγράφει δειγματοληπτικές διαδικασίες χωρίς επανατοποθέτηση. Αν έχουμε μια κάλπη με N σφαιρίδια από τα οποία $K \le N$ είναι λευκά και τα υπόλοιπα $N-K$ μαύρα και από αυτήν πάρουμε $n < N$ σφαιρίδια *χωρίς επανατοποθέτηση* τότε, αν συμβολίσουμε με X τον αριθμό των λευκών σφαιριδίων στο δείγμα, η πιθανότητα να έχουμε k λευκά σφαιρίδια είναι

$$p_k := \mathsf{P}(X=k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \qquad k = 0,1,2,\ldots,n. \tag{3.31}$$

Πρέπει να τονίσουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει ακόμη και αν $K < n$, δηλαδή αν ο αριθμός των λευκών σφαιριδίων είναι μικρότερος από το μέγεθος του δείγματος, K. Σ′ αυτή την περίπτωση βεβαίως παρατηρούμε ότι όλες οι πιθανότητες, $\mathsf{P}(X = K+1), \ldots, \mathsf{P}(X=n)$ είναι μηδέν. Πράγματι, για $K < k \le n$,

$$\binom{K}{k} = \frac{K\cdot(K-1)\cdots1\cdot0\cdots(K-k+1)}{(K+1)!} = 0$$

και επομένως ο πρώτος όρος στον αριθμητή του δεξιού σκέλους της (3.31) μηδενίζεται.

Έχουμε δει ήδη τον λόγο για τον οποίο ισχύει η (3.31). Πράγματι, όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε k λευκά σφαιρίδια από K που υπάρχουν στην κάλπη είναι $\binom{K}{k}$. Όλοι οι τρόποι που μπορούμε να διαλέξουμε $n-k$ μαύρα σφαιρίδια από τα $N-K$ που υπάρχουν στην κάλπη είναι $\binom{N-K}{n-k}$. Επομένως όλοι οι τρόποι που μπορούμε να διαλέξουμε ένα δείγμα μεγέθους n με k λευκά και $n-k$ μαύρα είναι $\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}$. Όμως όλοι οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διαλέξουμε n οποιεσδήποτε μπάλες από τις N που υπάρχουν στην κάλπη είναι $\binom{N}{n}$. Διαιρώντας τα δύο αποτελέσματα παίρνουμε την (3.31).

Θα πρέπει βεβαίως να ισχύει ότι

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = 1. \tag{3.32}$$

Από την ταυτότητα Vandermonde (1.25) για τους διωνυμικούς συντελεστές παρατηρούμε ότι $\sum_{k=0}^{n}\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} = \binom{N}{k}$ και συνεπώς επαληθεύουμε την (3.35).

Η μέση τιμή της υπεργεωμετρικής κατανομής υπολογίζεται ως εξής. Από την ταυτότητα (1.23) ισχύει ότι

$$k\binom{K}{k} = K\binom{K-1}{k-1}.$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} EX &= \frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{k=0}^{n} K\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k} = \frac{K}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{K-1}{k-1}\binom{N-K}{n-k} \\ &= \frac{K}{\binom{N}{n}}\sum_{k=1}^{n}\binom{K-1}{k-1}\binom{N-K}{n-k} \end{aligned}$$

Θέτωντας στην παραπάνω σχέση $l=k-1$ έχουμε

$$\begin{aligned} EX &= \frac{K}{\binom{N}{n}}\sum_{l=0}^{n-1}\binom{K-1}{l}\binom{N-1-(K-1)}{n-1-l} = K\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \\ &= K\frac{n}{N}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Για να υπολογίσουμε την διασπορά, εξατάζουμε την παραγοντική ροπή δεύτερης τάξης του X, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι

$$k(k-1)\binom{K}{k} = 2\binom{k}{2}\binom{K}{k} = 2\binom{K}{2}\binom{K-2}{k-2} = K(K-1)\binom{K-2}{k-2}$$

έχουμε

$$E[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{K(K-1)}{\binom{N}{n}}\sum_{k=2}^{n}\binom{K-2}{k-2}\binom{N-K}{n-k}.$$

Θέτοντας $k-2=l$ στο τελευταίο άθροισμα έχουμε

$$\begin{aligned} E[X(X-1)] &= \frac{K(K-1)}{\binom{N}{n}}\sum_{l=0}^{n-2}\binom{K-2}{l}\binom{N-2-(K-2)}{n-2-l} = \frac{K(K-1)}{\binom{N}{n}}\binom{N-2}{n-2} \\ &= K(K-1)\frac{n!}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}\frac{(N-2)(N-3)\cdots(N-n+1)}{(n-2)!} \\ &= n(n-1)\,\frac{K(K-1)}{N(N-1)}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Από τις (3.33), (3.34), και το γεγονός ότι $\mathrm{Var}(X) = E[X(X-1)] + EX - (EX)^2$, προκύπτει ότι η μέση τιμή και η διασπορά της υπεργεωμετρικής τυχαίας μεταβλητής δίδεται από τις εκφράσεις

$$EX = n\frac{K}{N}, \qquad \mathrm{Var}(X) = n\frac{K}{N}\left(1-\frac{K}{N}\right)\left(1-\frac{n-1}{N-1}\right). \tag{3.35}$$

Αν υποθέσουμε ότι η δειγματοληψία ήταν *με επανατοποθέτηση* τότε η πιθανότητα να έχουμε k λευκά σφαιρίδια ανάμεσα στα n επιλεγμένα θα ήταν διωνυμική, δηλαδή $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$ όπου $p=\frac{K}{N}$.

Επίσης, από την (3.31) μπορούμε να δείξουμε ότι, αν $N\to\infty$, $K\to\infty$, έτσι ώστε $K/N\to p$, ενώ το n παραμένει σταθερό, τότε

$$\frac{\binom{n}{k}\binom{N-n}{K-k}}{\binom{N}{K}} \to \binom{n}{k}p^k q^{n-k},$$

δηλαδή η υπεργεωμετρική προσεγγίζει την διωνυμική κατανομή. Ο λόγος είναι βεβαίως ότι, όταν ο αριθμός τόσο των λευκών σφαιριδίων στην κάλπη όσο και των μαύρων είναι πολύ μεγάλος τότε δεν υπάρχει μεγάλη διαφορά ανάμεσα στη δειγματοληψία με επανατοποθέτηση και στην δειγματοληψία χωρίς επανατοποθέτηση.

3.7 Η κατανομή Poisson

Μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο $\alpha>0$ αν

$$p_k = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}, \qquad k=0,1,3,\ldots. \tag{3.36}$$

Υπενθυμίζουμε την εκθετική σειρά: Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{3.37}$$

Με βάση αυτή την σειρά βλέπουμε ότι η (3.36) ορίζει πράγματι μια κατανομή πιθανότητας: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha} e^{\alpha} = 1$.

Η μέση τιμή της X υπολογίζεται εύκολα ως εξής

$$\mathsf{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha} \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\alpha} \alpha e^{\alpha} = \alpha. \tag{3.38}$$

Η παραγοντική ροπή δεύτερης τάξης είναι

$$\begin{aligned} \mathsf{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) \frac{\alpha^k}{k!} = e^{-\alpha} \alpha^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\alpha^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= e^{-\alpha} \alpha^2 e^{\alpha} = \alpha^{\cdot} \end{aligned} \tag{3.39}$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε την διασπορά ως

$$\mathsf{Var}(X) = \mathsf{E}[X(X-1)] + \mathsf{E}X - (\mathsf{E}X)^2 = \alpha^2 + \alpha - \alpha^2 = \alpha. \tag{3.40}$$

3.8 Η προσέγγιση της διωνυμικής κατανομής από την κατανομή Poisson

Θεωρούμε μια *ακολουθία από διωνυμικές τυχαίες μεταβλητές*, $\{X_n\}$, της οποίας ο n–οστός όρος έχει παραμέτρους (n, p_n) όπου $p_n = \alpha/n$ (με $\alpha > 0$) για όλα τα n που είναι μεγαλύτερα από κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}$. Εξετάζουμε με άλλα λόγια την περίπτωση που εκτελούμε ένα πείραμα που έχει μικρή πιθανότητα επιτυχίας πάρα πολλές φορές. Η πιθανότητα η X_n να έχει k επιτυχίες είναι

$$\mathsf{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

και για $n > n_0$ και $k \leq n$,

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} \frac{\alpha^k}{n^k} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} = \alpha^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\alpha^k}{k!} \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^n \cdot \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας ότι

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{i}{n}\right) &= 1, \qquad \text{για κάθε } i,\\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{-k} &= 1,\\ \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\alpha}{n}\right)^{n} &= e^{-\alpha},\end{aligned}$$

βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{\alpha^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.41}$$

Αυτό σημαίνει ότι, για μεγάλες τιμές του n, η κατανομή του X_n προσεγγίζει την κατανομή Poisson.

3.9 Τύπος του Stirling

Παρ΄ ότι ο υπολογισμός του $n! := 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ είναι εύκολος για μικρές τιμές του n, αυτό καθίσταται δύσκολο όταν το n είναι μεγάλο. Ο τύπος του Stirling είναι μια ασυμπτωτική σχέση η οποία δίνει αφ΄ ενός ένα εύκολο τρόπο για προσεγγιστικό, αλλά εξαιρετικά ακριβή υπολογισμό του $n!$ και αφ΄ ετέρου μια ιδέα για το πόσο γρήγορα μεγαλώνει το $n!$ σαν συνάρτηση του n.

Ορισμός 5. *Δύο πραγματικές ακολουθίες* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, *είναι* ασυμπτωτικά ισοδύναμες *αν*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Σ΄ αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $a_n \sim b_n$. *Για παράδειγμα, αν* $a_n = 1+2+\cdots+n$ *και* $b_n = \frac{1}{2}n^2$, *τότε* $a_n \sim b_n$.

Θεώρημα 4 (Τύπος του Stirling).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}} = 1.$$

Παρ΄ ότι η σχέση αυτή ισχύει ασυμπτωτικά, είναι εξαιρετικά ακριβής ακόμη και για μικρές τιμές του n. Για παράδειγμα, όταν $n = 10$, $n! = 3.628.800$ ενώ ο τύπος του Stirling δίνει $\sqrt{2\pi 10}\, 10^{10} e^{-10} = 3.598.695, 6$ δηλαδή ένα σχετικό σφάλμα $-0, 83\%$.

Σαν εφαρμογή του τύπου του Stirling ας υπολογίσουμε την πιθανότητα σε 100 ρίψεις ενός τιμίου νομίσματος να έχουμε ακριβώς 50 κορώνες. Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τον τύπο της διωνυμικής κατανομής ως $\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$ όπου $n = 50$.

$$
\begin{aligned}
\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\,(2n)^{2n}e^{-2n}}{(\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n})^2}\frac{1}{4^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n\pi}}. \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

Όταν $n = 50$, η πιθανότητα είναι 0.0798. Έτσι, βλέπουμε ότι για 100 ρίψεις η πιθανότητα «ισοπαλίας» είναι σημαντικότατη και εγγίζει σχεδόν το 8%. Για 1000 ρίψεις, από τον ίδιο τύπο προκύπτει ότι η πιθανότητα ισοπαλίας είναι 1.8%.

Κεφάλαιο 4

Από κοινού κατανομή δύο τυχαίων μεταβλητών

4.1 Από κοινού κατανομή τυχαίων μεταβλητών

Έστω δυο τυχαίες μεταβλητές X, Y, με τιμές στο $\mathbb{N}_0$ ορισμένες πάνω στο ίδιο χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Το σύνολο των πιθανοτήτων

$$p_{X,Y}(i,j) := P(X = i, Y = j), \qquad i, j \in \mathbb{N}_0,$$

ονομάζεται *από κοινού κατανομή* των X, Y. Ισχύει ασφαλώς ότι $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} p_{XY}(i,j) = 1$. Οι

$$\begin{aligned} p_X(i) &:= P(X = i) = \sum_{j=0}^{\infty} p_{X,Y}(i,j) \\ p_Y(j) &:= P(Y = j) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{X,Y}(i,j) \end{aligned}$$

ονομάζονται *περιθώριες* κατανομές των X και Y αντίστοιχα. Τα παραπάνω αθροίσματα γράφονται ως άπειρα αθροίσματα μη αρνητικών αριθμών, σε πολλές περιπτώσεις όμως είναι πεπερασμένα αθροίσματα αφού όλοι οι όροι πλην πεπερασμένων μπορεί να είναι μηδέν.

Παράδειγμα 1. *Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές X με τιμές $\{1, 2, 3, 4\}$ και Y με τιμές $\{1, 2\}$. Έστω ότι η από κοινού κατανομή τους δίνεται από τον πίνακα.*

Y/X	*1*	*2*	*3*	*4*
1	1/6	1/12	*0*	1/6
2	1/6	1/12	*0*	2/6

Οι περιθώριες πιθανότητες δίνονται από τις

$p_X(1) = 1/3,\ p_X(2) = 1/6,\ p_X(3) = 0,\ p_X(4) = 1/2, \qquad p_Y(1) = 5/12,\ p_Y(2) = 7/12.$

Ορισμός 6. *Δύο τυχαίες μεταβλητές,* X, Y, *ονομάζονται* ανεξάρτητες *αν,*

$$P(X = i, Y = j) = P(X = i)P(Y = j), \qquad \textit{για κάθε } i, j.$$

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί επίσης να διατυπωθεί λέγοντας ότι η από κοινού κατανομή είναι το γινόμενο των περιθωρίων. *Αυτό σημαίνει ότι, για να είναι οι δύο τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες, θα πρέπει όλα τα ενδεχόμενα της μορφής* $\{X = i\}$, $\{Y = j\}$, *να είναι ανεξάρτητα.*

Όταν οι τυχαίες μεταβλητές X, Y, *δεν είναι ανεξάρτητες τότε θα ονομάζονται εξαρτημένες.*

Για παράδειγμα οι τυχαίες μεταβλητές με την από κοινού κατανομή που δίνεται στον πίνακα 1 δεν είναι ανεξάρτητες αφού $P(X = 1, Y = 1) = 1/6$ ενώ $P(X = 1)P(Y = 1) = 1/3 \times 5/12 = 5/36$.

Ορισμός 7. *Η δεσμευμένη κατανομή της τυχαίας μεταβλητής* X, *δεδομένης της* Y *δίδεται από την σχέση*

$$P(X = i|Y = j) \ = \ \frac{P(X = i, Y = j)}{P(Y = j)}.$$

Έστω $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, μία συνάρτηση δύο μεταβλητών στους πραγματικούς αριθμούς. Τότε η μέση τιμή $Ef(X, Y)$ δίδεται από την σχέση

$$E[f(X, Y)] = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f(i, j) p_{X,Y}(i, j). \tag{4.1}$$

Το επόμενο θεώρημα εκφράζει την θεμελιώδη ιδιότητα της γραμμικότητας της μέσης τιμής.

Θεώρημα 5. *Αν* X, Y *δύο οποιεσδήποτε τυχαίες μεταβλητές και* a, b, *πραγματικοί αριθμοί, τότε* $E[aX + bY] = aEX + bEY$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.1), όπου $f(i, j) = a \cdot i + b \cdot j$,

$$\begin{aligned}
E[aX + bY] &= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (ai + bj) p_{X,Y}(i, j) = a \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} i\ p_{X,Y}(i, j) + b \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} j\ p_{X,Y}(i, j) \\
&= a \sum_{i=0}^{\infty} i \sum_{j=0}^{\infty} p_{X,Y}(i, j) + b \sum_{j=0}^{\infty} j \sum_{i=0}^{\infty} p_{X,Y}(i, j) \\
&= a \sum_{i=0}^{\infty} iP(X = i) + b \sum_{j=0}^{\infty} jP(Y = j) \\
&= aEX + bEY.
\end{aligned}$$

□

Θεώρημα 6. *Έστω* f_i, $i = 1, 2$, *δύο συναρτήσεις από τους φυσικούς στους πραγματικούς και* X_1, X_2, *δύο ανεξάρτητες τ.μ. Τότε*

$$E[f_1(X_1)f_2(X_2)] = E[f_1(X_1)]\ E[f_2(X_2)]. \tag{4.2}$$

Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται επαγωγικά για οποιοδήποτε αριθμό τ.μ.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (4.1) έχουμε

$$\begin{aligned} E[f_1(X_1)f_2(X_2)] &= \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} f_1(n_1)f_2(n_2)P(X_1 = n_1)P(X_2 = n_2) \\ &= \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} f_1(n_1)P(X_1 = n_1)\right)\left(\sum_{n_2=0}^{\infty} f_2(n_2)P(X_2 = n_2)\right) \\ &= E[f_1(X_1)]\ E[f_2(X_2)]. \end{aligned}$$

□

Η *συνδιακύμανση* δύο τυχαίων μεταβλητών, X_1, X_2, ορίζεται ως

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = E\left[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)\right] = E[X_1X_2] - (EX_1)(EX_2).$$

Δυο τ.μ. των οποίων η συνδιακύμανση είναι 0 ονομάζονται *ασυσχέτιστες*. Από την (4.2) προκύπτει ότι όταν δύο τ.μ. είναι ανεξάρτητες τότε είναι και ασυσχέτιστες αφού σ΄ αυτή την περίπτωση $E[X_1X_2] = (EX_1)(EX_2)$. *Το αντίθετο όμως δεν ισχύει, δηλαδή δύο ασυσχέτιστες τ.μ. δεν είναι υποχρεωτικά ανεξάρτητες.*

Ας δούμε το ακόλουθο χαρακτηριστικό αντιπαράδειγμα. Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές, ορισμένες στον ίδιο χώρο με τιμές στο σύνολο $\{0, 1, 2\}$ και από κοινού κατανομή που δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα.

Y/X	0	1	2
0	1/8	0	1/8
1	0	1/2	0
2	1/8	0	1/8

Η περιθώρια κατανομή της X είναι $p_X(0) = 1/4$, $p_X(1) = 1/2$, $p_X(2) = 1/4$. Η περιθώρια κατανομή της Y είναι ίδια με αυτή της X. Έχουμε συνεπώς ότι $EX = EY = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$. Η μέση τιμή του γινομένου των X και Y, γράφοντας μόνο τους μη μηδενικούς όρους, είναι $EXY = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = 1$ και επομένως η συνδιακύμανση είναι $\mathrm{Cov}(X, Y) = E[XY] - EX \cdot EY = 1 - 1 = 0$. Άρα οι X και Y είναι ασυσχέτιστες. Δεν είναι όμως ανεξάρτητες. Για παράδειγμα $\mathsf{P}(X=1,Y=2) = 0 \neq \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \mathsf{P}(X=1)\cdot\mathsf{P}(Y=2)$, και επομένως η από κοινού κατανομή δεν είναι το γινόμενο των περιθωρίων.

Θεώρημα 7. *Για δύο οποιεσδήποτε τ.μ.* X_1, X_2,

$$\mathrm{Var}(X_1+X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + 2\mathrm{Cov}(X_1,X_2). \tag{4.3}$$

Όταν οι X_1, X_2 *είναι ασυσχέτιστες,* $\mathrm{Var}(X_1+X_2) = \mathrm{Var}(X_1)+\mathrm{Var}(X_2)$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη έκφραση για την διασπορά

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_1+X_2) &= \mathsf{E}[(X_1+X_2)^2] - (\mathsf{E}[X_1+X_2])^2 \\
&= \mathsf{E}[X_1^2+2X_1X_2+X_2^2] - \big((\mathsf{E}X_1)^2 + 2\mathsf{E}X_1\mathsf{E}X_2 + (\mathsf{E}X_2)^2\big) \\
&= \mathsf{E}[X_1^2] + 2\mathsf{E}[X_1X_2] + \mathsf{E}[X_2^2] - (\mathsf{E}X_1)^2 - (\mathsf{E}X_2)^2 - 2\mathsf{E}X_1\mathsf{E}X_2
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε κατ΄ επανάληψη τη γραμμικότητα της μέσης τιμής. Συλλέγοντας όρους στο τελευταίο μέλος των παραπάνω εξισώσεων και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $\mathrm{Var}(X_i) = \mathsf{E}X_i^2 - (\mathsf{E}X_i)^2$, $i=1,2$, $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = \mathsf{E}[X_1X_2] - \mathsf{E}X_1\mathsf{E}X_2$, προκύπτει η (4.3). □

4.2 Η ανισότητα του Chebyshev

Θεώρημα 8. *Αν* X *είναι τυχαία μεταβλητή με μέσο* μ *και διασπορά* σ^2 *τότε, για κάθε* $\epsilon>0$,

$$\mathsf{P}(|X-\mu|>\epsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}. \tag{4.4}$$

Απόδειξη.

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sum_k (k-\mu)^2 p_k = \sum_{\{k:|k-\mu|>\epsilon\}} (k-\mu)^2 p_k + \sum_{\{k:|k-\mu|\leq\epsilon\}} (k-\mu)^2 p_k \\
&\geq \sum_{\{k:|k-\mu|>\epsilon\}} (k-\mu)^2 p_k \\
&\geq \epsilon^2 \sum_{\{k:|k-\mu|>\epsilon\}} p_k \\
&= \epsilon^2 \mathsf{P}(|X-\mu|>\epsilon).
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 1. *Αν για μια τυχαία μεταβλητή με μέσο* μ *και διασπορά* σ^2 *ισχύει ότι* $\sigma=0$ *τότε* $\mathsf{P}(X=\mu)=1$.

Απόδειξη. Από το δεξί μέλος της ανισότητας του Chebyshev ισχύει ότι $\mathsf{P}(|\mathsf{X}-\mu| > \epsilon) = 0$ για κάθε $\epsilon > 0$. □

Η παραπάνω ανισότητα μας δίνει ένα άνω όριο για την πιθανότητα μια τυχαία μεταβλητή να απέχει περισσότερο από ϵ από τη μέση της τιμή. Το άνω όριο δεν είναι εν γένει ικανοποιητικό για τις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές, έχει όμως μεγάλη θεωρητική σημασία. Εδώ θα το χρησιμοποιήσουμε στην απόδειξη του Νόμου των Μεγάλων Αριθμών. Ώς ένα παράδειγμα εφαρμογής της ανισότητας του Chebyshev, ας πάρουμε την X ομοιόμορφη στο σύνολο $\{1, 2, \ldots, 100\}$. Έχουμε $\mathsf{EQ} = 50,5$ και $\mathsf{Var}(\mathsf{X}) = 833,25$ από τους τύπους (3.27) και (3.29) με $n = 100$. Με $\epsilon = 40$ η ανισότητα μας λέει ότι

$$\mathsf{P}(|\mathsf{X} - 50,5| > 40) \leq \frac{833,5}{1600} = 0,52.$$

Είναι όμως $\mathsf{P}(|\mathsf{X} - 50,5| > 40) = \mathsf{P}(\mathsf{X} \geq 91) + \mathsf{P}(\mathsf{X} \leq 10) = 0,2$. Για μικρές τιμές του ϵ το δεξί μέλος της (4.4) γίνεται μεγαλύτερο από την μονάδα κι΄ έτσι η ανισότητα δεν μας δίνει καμία χρήσιμη πληροφορία. Όπως θα δούμε όμως, σαν θεωρητικό εργαλείο μπορεί να είναι εξαιρετικά χρήσιμη.

4.3 Η ανισότητα Cauchy–Schwarz

Θεώρημα 9. *Για δύο οποιεσδήποτε τυχαίες μεταβλητές* X, Y, *με πεπερασμένες διασπορές ισχύει ότι*

$$|\mathsf{Cov}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})| \leq \sqrt{\mathsf{Var}(\mathsf{X})\mathsf{Var}(\mathsf{Y})}. \tag{4.5}$$

Αν η (4.5) ισχύει ως ισότητα, τότε υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}$ *τέτοια ώστε* $\mathsf{Y} = a\mathsf{X} + b$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(t) := \mathsf{Var}(\mathsf{Y} - t\mathsf{X}) = \mathsf{Var}(\mathsf{Y}) + t^2\mathsf{Var}(\mathsf{X}) - 2t\mathsf{Cov}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \quad \text{με } t \in \mathbb{R}.$$

Εφ΄ όσον η $f(t)$ είναι διασπορά θα είναι υποχρεωτικά $f(t) \geq 0$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η διακρίνουσα του τριωνύμου θα είναι αρνητική ή μηδέν, πράγμα που σημαίνει ότι

$$(\mathsf{Cov}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}))^2 \leq \mathsf{Var}(\mathsf{X})\mathsf{Var}(\mathsf{Y}).$$

Από την σχέση αυτή προκύπτει άμεσα η (4.5).

Αν η (4.5) ισχύει ως ισότητα τότε η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι 0 και υπάρχει ακριβώς μια τιμή του t, έστω $t = a$ τέτοια ώστε $f(a) = 0$. Αυτό όμως σημαίνει ότι $\mathsf{Var}(\mathsf{Y} - a\mathsf{X}) = 0$ και συνεπώς ότι $\mathsf{P}(\mathsf{Y} - a\mathsf{X} = b) = 1$ με $b = \mathsf{E}[\mathsf{Y} - a\mathsf{X}]$ από το πόρισμα της ανισότητας του Chebyshev. Η τιμή του a είναι $\frac{\mathsf{Cov}(\mathsf{X},\mathsf{Y})}{\mathsf{Var}(\mathsf{X})}$. □

Ορισμός 8. *Η ποσότητα*

$$\rho := \frac{\mathsf{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathsf{Var}(X)\mathsf{Var}(Y)}} \tag{4.6}$$

ονομάζεται συντελεστής συσχέτισης και παίρνει τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$.

Το γεγονός ότι ο συντελεστής συσχέτισης ανήκει πάντα στο διάστημα $[-1, 1]$ είναι απόρροια της ανισότητας Cauchy–Schwarz.

4.4 Ο Νόμος των Μεγάλων Αριθμών

Θεώρημα 10. *Αν* $X_1, X_2, X_3, \ldots$ *είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μέσο* μ *και διασπορά* σ^2 *τότε ο αριθμητικός μέσος* $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$ *τείνει* κατά πιθανότητα *στην μέση τιμή όταν το* $n \to \infty$ *δηλαδή*

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) \to 0 \quad \forall\, \epsilon > 0 \text{ όταν } n \to \infty. \tag{4.7}$$

Απόδειξη. Ας θέσουμε $Y_n := \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$. Θα έχουμε $\mathsf{E}Y_n = \frac{1}{n}(\mu + \cdots + \mu) = \mu$ από την γραμμικότητα της μέσης τιμής και αφού οι X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, είναι ανεξάρτητες θα έχουμε επίσης ότι

$$\mathsf{Var}(Y_n) = \frac{1}{n^2}(\sigma^2 + \cdots + \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{n}.$$

Το αριστερό μέλος της (4.7) γράφεται ως $\mathsf{P}(|Y_n - \mu| \geq \epsilon)$ και από την ανισότητα του Chebyshev) έχουμε ότι

$$\mathsf{P}(|Y_n - \mu| > \epsilon) \leq \frac{\mathsf{Var}(Y_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2}.$$

Για $\epsilon > 0$ οσοδήποτε μικρό αλλά σταθερό, καθώς το n τείνει στο άπειρο το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης τείνει στο μηδέν! Αυτό αποδεικνύει την (4.7). □

(Ισόνομες τυχαίες μεταβλητές είναι τυχαίες μεταβλητές που έχουν τον ίδιο «νόμο πιθανοτήτων» δηλαδή την ίδια κατανομή. Η υπόθεση αυτή δεν ήταν πραγματικά απαραίτητη εδώ. Αρκεί οι τυχαίες μεταβλητές να είναι ανεξάρτητες (ή ακόμα και απλά ασυσχέτιστες) και να έχουν την ίδια μέση τιμή και διασπορά.)

4.5 Κατανομή του αθροίσματος ανεξαρτήτων τ.μ.

Έστω X, Y, ανεξάρτητες τ.μ. με δεδομένες κατανομές $P(X = n)$, $P(Y = m)$, $n, m = 0, 1, 2, \ldots$. Έστω $Z = X + Y$, το άθροισμα των δύο τ.μ. Η κατανομή της Z υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X + Y = k) = \sum_{n=0}^{k} P(X = n, Y = k - n) \\ &= \sum_{n=0}^{k} P(X = n)P(Y = k - n). \qquad (4.8) \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση οφείλεται στην ανεξαρτησία των X και Y το δε άθροισμα ονομάζεται *συνέλιξη* των δύο κατανομών.

Παράδειγμα 2. *Έστω X διωνυμική τ.μ. με παραμέτρους n και p δηλαδή $P(X = i) = \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$, για $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, όπου $q = 1 - p$. Η τ.μ. Y είναι επίσης διωνυμική με παραμέτρους m και p και ανεξάρτητη από την X. Η κατανομή της $Z := X + Y$ δίνεται τότε από την συνέλιξη των δύο διωνυμικών κατανομών δηλαδή*

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} q^{m-k+i} \\ &= p^k q^{m+n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\ &= \binom{m+n}{k} p^k q^{m+n-k}. \end{aligned}$$

Στην τελευταία εξίσωση της παραπάνω σχέσης χρησιμοποιήσαμε την συνδυαστική ταυτότητα

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}. \qquad (4.9)$$

Παράδειγμα 3. *Έστω X, Y ανεξάρτητες γεωμετρικές τ.μ. με παράμετρο p. Η κατανομή της $Z := X + Y$ δίνεται από την συνέλιξη*

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X = i)P(Y = k - i) = \sum_{i=1}^{k-1} pq^i pq^{k-i} \\ &= (k-1)q^k p^2. \end{aligned}$$

(Η κατανομή αυτή όπως θα δούμε αργότερα είναι μια ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής ή κατανομής Pascal.)

Παράδειγμα 4. *Έστω* X *τ.μ. Poisson με παράμετρο* α_1*, δηλαδή* $P(X = k) = \frac{\alpha_1^k}{k!}e^{-\alpha_1}$*,* $k = 0, 1, 2, \ldots$*. Η τ.μ.* Y *είναι επίσης Poisson με παράμετρο* α_2 *και ανεξάρτητη της* X*. Η κατανομή της* $Z := X + Y$ *δίνεται τότε από την συνέλιξη των δύο κατανομών Poisson δηλαδή*

$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= \sum_{n=0}^{k} P(X = n)P(Y = k - n) = \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha_1^n}{n!}e^{-\alpha_1}\frac{\alpha_2^{k-n}}{(k-n)!}e^{-\alpha_2} \\
&= e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha_1^n}{n!}\frac{\alpha_2^{k-n}}{(k-n)!} = \frac{1}{k!}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \alpha_1^n \alpha_2^{k-n} \\
&= \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^k}{k!}e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}.
\end{aligned}$$

Επομένως το άθροισμα δύο ανεξαρτήτων τ.μ. Poisson είναι πάλι Poisson με παράμετρο το άθροισμα των παραμέτρων.

4.6 Παραδείγματα

1. Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουμε δύο ζάρια διακριτά μεταξύ τους, π.χ. ένα κόκκινο και ένα πράσινο. Έστω X το αποτέλεσμα της ρίψης του κόκκινου ζαριού και Y το αποτέλεσμα της ρίψης του πράσινου. Η από κοινού κατανομή των X, Y, δίνεται από τον πίνακα

Y/X	1	2	3	4	5	6
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
4	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
5	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36

Έστω $Z := \min(X, Y)$ και $W := \max(X, Y)$ το μικρότερο και το μεγαλύτερο από τα δύο αποτελέσματα των δύο ζαριών. Οι Z και W είναι βεβαίως τυχαίες μεταβλητές. Η από κοινού κατανομή της X και της Z είναι

Z/X	1	2	3	4	5	6
1	6/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36
2		5/36	1/36	1/36	1/36	1/36
3			4/36	1/36	1/36	1/36
4				3/36	1/36	1/36
5					2/36	1/36
6						1/36

(Κενές τιμές στον πίνακα είναι μηδέν.) Δεν είναι δύσκολο να καταλάβουμε πώς συμπληρώνεται αυτός ο πίνακας. Για παράδειγμα $P(X = 2, Z = 3) = 0$ αφού είναι αδύνατον το μικρότερο από τα αποτελέσματα να είναι μεγαλύτερο από τό ελάχιστο των δύο. $P(X = 3, Z = 2) = P(X = 3, Y = 2) = 1/36$ αφού σ′ αυτή την περίπτωση η τιμή του Z αποκαλύπτει και την τιμή του Y. Τέλος $P(X = 3, Z = 3) = P(X = 3, Y = 1) + P(X = 3, Y = 2) + P(X = 3, Y = 3) = 3/36$. Οι υπόλοιπες τιμές συμπληρώνονται με παρόμοιο τρόπο.

Εντελώς ανάλογα μπορούμε να δούμε ότι

W/X	1	2	3	4	5	6
1	1/36					
2	1/36	2/36				
3	1/36	1/36	3/36			
4	1/36	1/36	1/36	4/36		
5	1/36	1/36	1/36	1/36	5/36	
6	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	6/36

Τέλος η από κοινού κατανομή του maximum και του minimum είναι

W/Z	1	2	3	4	5	6
1	1/36					
2	2/36	1/36				
3	2/36	2/36	1/36			
4	2/36	2/36	2/36	1/36		
5	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36	
6	2/36	2/36	2/36	2/36	2/36	1/36

Για να καταλάβουμε πώς συμπληρώνεται ο τελευταίος πίνακας παρατηρούμε ότι $P(W = 2, Z = 2) = P(X = 2, Y = 2) = 1/36$. Τό ίδιο ισχύει βέβαια και για τα άλλα διαγώνια στοιχεία. Παρόμοια, $P(W = 2, Z = 4) = 0$ αφού το maximum δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το minimum. Τέλος $P(W = 4, Z = 2) = P(X = 2, Y = 4) + P(X = 4, Y = 2) = 2/36$.

Ας υπολογίσουμε τώρα τις περιθώριες κατανομές των Z και W. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τρίτο πίνακα αλλά θα μπορούσαμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε και τους δύο πρώτους. Έχουμε

W	1	2	3	4	5	6
	1/36	3/36	5/36	7/36	9/36	11/36

Z	1	2	3	4	5	6
	11/36	9/36	7/36	5/36	3/36	1/36

Η μέση τιμή της W είναι $EW = \frac{1}{36}(1\cdot 1+2\cdot 3+3\cdot 5+4\cdot 7+5\cdot 9+6\cdot 11) = 4,4722$. Δεν πρέπει να μας εκπλήσσει το γεγονός ότι η μέση τιμή της W είναι μεγαλύτερη από την $EX = 3,5$. Την μέση τιμή της Z θα μπορούσαμε να την υπολογίσουμε από τον ορισμό. Όμως είναι απλούστερο (και πιο διδακτικό) να παρατηρήσουμε ότι $X+Y = \min(X,Y)+\max(X,Y) = Z+W$. Από την γραμμικότητα της μέσης τιμής θα έχουμε $EX+EY = EZ+EW$ και συνεπώς $EZ = 7-4,4722 = 2,5278$.

Οι διασπορές υπολογίζονται επίσης από τον ορισμό: $\mathrm{Var}(X) = 2,9167$, $\mathrm{Var}(W) = \mathrm{Var}(Z) = 1,9715$. Παρατηρείστε ότι λόγω συμμετρίας οι διασπορές των Z και W είναι ίσες.

Οι συνδιακυμάνσεις που υπολογίζονται από τον ορισμό είναι $\mathrm{Cov}(X,Z) = 1,4583$, $\mathrm{Cov}(X,W) = 1,4583$, $\mathrm{Cov}(Z,W) = 0,9452$.

Τέλος οι συντελεστές συσχέτισης είναι $\rho_{XZ} = 0,6082$, $\rho_{XW} = 0,6082$, $\rho_{ZW} = 0,4795$. Παρατηρείστε ότι όλοι οι συντελεστές συσχέτισης είναι θετικοί. Αυτό είναι αναμενόμενο. Αν ξέρουμε ότι το X είναι μεγάλο τότε το minimum των X και Y επίσης θα τείνει να είναι μεγαλύτερο από τη μέση του τιμή, όπως και το maximum. Αν ξέρουμε ότι το minimum είναι μεγαλύτερο από την μέση του τιμή τότε και το maximum θα τείνει να είναι μεγαλύτερο από τη δική του μέση τιμή. Όμως η γνώση του X μας δίνει μεγαλύτερη πληροφορία για το maximum απ' ότι η γνώση του minimum και γι' αυτό $\rho_{XZ} > \rho_{WZ}$.

4.7 Ασκήσεις

4.7.1. *Έστω X_1, X_2 ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Poisson με παραμέτρους α_1, α_2 αντίστοιχα. Αν $S = X_1 + X_2$ είναι το άθροισμά τους να ευρεθεί η πιθανότητα $P(X_1 = k|S = n)$, $k = 0,1,2,\dots,n$.*

4.7.2. X_i, $i = 1,2,3$, *είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή Poisson με παραμέτρους α_i αντίστοιχα. Αν $W = X_1 + X_3$ και $V = X_2 + X_3$ να υπολογίσετε τους μέσους των W, V, τις διακυμάνσεις, την συνδιακύμανση και τον συντελεστή συσχέτισης. Να υπολογίσετε επίσης και την από κοινού κατανομή των W και V.*

4.7.3. *Η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών X, Y, που παίρνουν τιμές στο σύνολο $\{0,1,2\}$ δίδεται από τον πίνακα*

2	1/6	1/6	0
1	1/6	0	1/6
0	0	1/6	1/6
Y/X	0	1	2

Να ευρεθούν οι μέσοι, οι διακυμάνσεις και η συνδιακύμανση των X, Y. *Είναι οι* X, Y *ανεξάρτητες;*

Κεφάλαιο 5

Πολυμεταβλητές Κατανομές

5.1 Πολυωνυμική Κατανομή

Έστω ένα πείραμα που μπορεί να έχει m διαφορετικά αποτελέσματα, τα οποία ονομάζουμε $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Η πιθανότητα το αποτέλεσμα του πειράματος να είναι το a_i είναι p_i και $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η η ρίψη ενός τίμιου ζαριού όπου υπάρχουν έξι διαφορετικά ισοπίθανα αποτελέσματα. Εκτελούμε το πείραμα n φορές και υποθέτουμε ότι κάθε επανάληψη είναι ανεξάρτητη από όλες τις άλλες. Έστω X_1 ο αριθμός των πειραμάτων στα οποία το αποτέλεσμα ήταν a_1, X_2 ο αριθμός των πειραμάτων στα οποία το αποτέλεσμα ήταν a_1 και X_n ο αριθμός των πειραμάτων στα οποία το αποτέλεσμα ήταν a_m. Τα $X_1, X_2, \ldots, X_m$ είναι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες βεβαίως δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ισχύει μάλιστα, αναγκαστικά, ότι $X_1 + X_2 + \cdots + X_m = n$. Η από κοινού κατανομή των τυχαίων αυτών μεταβλητών ονομάζεται πολυωνυμική. Αν $n_1, n_2, \ldots, n_m$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$, τότε

$$P(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_m = n_m) = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_m^{n_m}. \tag{5.1}$$

Ας δούμε πρώτα ένα παράδειγμα. Έστω ένα πείραμα που έχει τρία δυνατά αποτελέσματα, τα a_1, a_2, και a_3 τα οποία συμβαίνουν με πιθανότητες p_1, p_2 και p_3 αντίστοιχα, όπου βεβαίως $p_1+p_2+p_3 = 1$ εφόσον ένα από τα τρία αποτελέσματα θα συμβεί κάθε φορά. Ας υποθέσουμε ότι το εκτελούμε 10 φορές και κάθε επανάληψη είναι ανεξάρτητη από όλες τις άλλες. X_i, $i = 1, 2, 3$, είναι ο αριθμός των πειραμάτων των οποίων το αποτέλεσμα ήταν a_i. Ας υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(X_1 = 3, X_2 = 5, X_3 = 2)$. Η πιθανότητα να έχουμε τα αποτελέσματα

$$a_1 a_1 a_1 a_2 a_2 a_2 a_2 a_2 a_3 a_3$$

είναι $p_1^3p_2^5p_3^2$ λόγω της ανεξαρτησίας των πειραμάτων. Η πιθανότητα μιας οποιασδήποτε άλλης πραγματοποίησης με 3 a_1, 5 a_2 και 2 a_3 είναι η ίδια. Το μόνο θέμα που υπάρχει είναι να δούμε πόσες διαφορετικές πραγματοποιήσεις υπάρχουν με τον συγκεκριμένο αριθμό των τριών αποτελεσμάτων, με πόσους διαφορετικούς τρόπους δηλαδή μπορούμε να βάλουμε στη σειρά 3 a_1, 5 a_2 και 2 a_3. Αυτός ο αριθμός όμως είναι ο αριθμός των επαναληπτικών μεταθέσεων που είναι $\binom{10}{3,5,2} = 2520$. Συνεπώς $P(X_1 = 3, X_2 = 5, X_3 = 2) = \binom{10}{3,5,2}p_1^3p_2^5p_3^2$.

Ως ένα δεύτερο παράδειγμα επιβεβαιώστε ότι η πιθανότητα σε 6 ρίψεις ενός τιμίου ζαριού να έχουμε 2 δυάρια, 2 τεσσάρια και 2 εξάρια είναι

$$\binom{6}{0,2,0,2,0,2}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{6!}{2!0!2!0!2!0!}\frac{1}{6^6} = 0,0019.$$

Η από κοινού κατανομή του αριθμού των διαφορετικών αποτελεσμάτων,

$$(X_1, X_2, \ldots, X_m),$$

ονομάζεται *πολυωνυμική κατανομή*. Το αθροισμα των πολυωνυμικών πιθανοτήτων (5.1) για όλα τα $n_1, n_2, \ldots, n_m$ τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^m n_i = n$ είναι μονάδα λόγω του πολυωνυμικού θεωρήματος:

$$\sum_{\{(n_1,\ldots,n_m):\sum_{i=1}^m n_i = n\}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m} p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m} \;=\; (p_1 + \cdots + p_m)^n = 1^n = 1.$$

Η περιθώρια κατανομή της X_i μπορεί να υπολογισθεί αθροίζοντας τις πολυωνυμικές πιθανότητες.

Ας δούμε ξανά το πείραμα που έχει τρία διαφορετικά αποτελέσματα, a_1, a_2, και a_3 τα οποία συμβαίνουν με πιθανότητες p_1, p_2 και p_3 αντίστοιχα, όπου $p_1+p_2+p_3 = 1$, και το οποίο επαναλαμβάνουμε ανεξάρτητα n φορές. Έστω X_1, X_2, X_3, ο αριθμός των αποτελεσμάτων τύπου a_1, a_2, και a_3 στις n επαναλήψεις. Η από κοινού κατανομή των (X_1, X_2, X_3) θα είναι, σύμφωνα με τον τύπο (5.1) για $m = 3$,

$$P(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) = \binom{n}{i, j, k} p_1^i p_2^j p_3^k. \tag{5.2}$$

Για να βρούμε την περιθώρια κατανομή του X_1 αρκεί να αθροίσουμε ως εξής:

$$P(X_1 = i) \;=\; \sum_{\{(j,k):j+k=n-i,\ j,k\in\mathbb{N}_0\}} \binom{n}{i, j, k} p_1^i p_2^j p_3^k \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Λαμβάνοντας υπ′ όψιν ότι $i + j + k = n$ και

$$\binom{n}{i, j, k} \;=\; \frac{n!}{(n-i)!i!}\frac{(n-i)!}{(n-i-j)!j!} \;=\; \binom{n}{i}\binom{n-i}{j}$$

η παραπάνω έκφραση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned}
P(X_1 = i) &= \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} p_1^i p_2^j p_3^{n-i-j} = \binom{n}{i} p_1^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} p_2^j p_3^{n-i-j} \\
&= \binom{n}{i} p_1^i (p_2+p_3)^{n-i} = \binom{n}{i} p_1^i (1-p_1)^{n-i} \qquad (5.3)
\end{aligned}$$

όπου, στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το διωνυμικό θεώρημα και στην τελευταία το γεγονός ότι $p_2 + p_3 = 1 - p_1$. Από την (5.3) είναι σαφές ότι η X_1 έχει Διωνυμική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας p_1 και αριθμό δοκιμών n. Αυτό μπορεί να το καταλάβει κανείς άμεσα θεωρόντας ότι το πείραμα δεν έχει τρία αποτελέσματα αλλά μόνο δύο: το αποτέλεσμα a_1 που συμβαίνει με πιθανότητα p_1 και το αποτέλεσμα «όχι a_1» (δηλαδή a_2 ή a_3) που συμβαίνει με πιθανότητα $p_2 + p_3 = 1 - p_1$.

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε γενικά (και οι δείκτες δεν πρέπει να μας αποθαρρύνουν) ότι η περιθώριος κατανομή του X_i για την γενική πολυωνυμική κατανομή (5.1) είναι διωνυμική:

$$P(X_i = n_i) = \binom{n}{n_i} p_i^{n_i}(1-p_i)^{n-n_i}, \qquad n_i = 0, 1, \ldots, n. \qquad (5.4)$$

Από τις ιδιότητες της διωνυμικής κατανομής συμπεραίνουμε ότι $\mathsf{E}X_i = np_i$ και $\mathsf{Var}(X_i) = np_i(1-p_i)$.

Στη συνέχεια μπορούμε να υπολογίσουμε την από κοινού κατανομή των (X_1, X_2) για την πολυωνυμική κατανομή (5.2) με τρία διαφορετικά αποτελέσματα. Αν i, j είναι δύο μη αρνητικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $i + j \leq n$ τότε, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $i + j + k = n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P(X_1 = i, X_2 = j) &= \binom{n}{i, j, k} p_1^i p_2^j p_3^k \\
&= \binom{n}{i, j, n-i-j} p_1^i p_2^j (1-p_1-p_2)^{n-i-j}, \qquad i + j \leq n.
\end{aligned}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την συνδιακύμανση των X_1, X_2, υπολογίζουμε πρώτα την μέση τιμή του γινομένου

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}[X_1X_2] &= \sum_{\{(i,j):\ i+j\leq n,\ i\geq 1,\ j\geq 1\}} ij \binom{n}{i, j, n-i-j} p_1^i p_2^j (1-p_1-p_2)^{n-i-j} \\
&= \sum_{\{(i,j):\ i+j\leq n,\ i\geq 1,\ j\geq 1\}} \frac{n!}{(i-1)!(j-1)!(n-i-j)!} p_1^i p_2^j (1-p_1-p_2)^{n-i-j} \\
&= n(n-1)p_1p_2 \sum_{\{(i,j):\ i-1+j-1\leq n-2,\ i-1\geq 0,\ j-1\geq 0\}} \frac{(n-2)!}{(i-1)!(j-1)!(n-2-(i-1)-(j-1))!} \\
&\qquad \times p_1^{i-1} p_2^{j-1} (1-p_1-p_2)^{n-2-(i-1)-(j-1)}.
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $i-1=i'$, $j-1=j$, το τελευταίο σκέλος της παραπάνω εξίσωσης γράφεται ως

$$n(n-1)p_1p_2 \sum_{\{(i',j'):\ i'+j'\le n-2,\ i'\ge 0,\ j'\ge 0\}} \frac{(n-2)!}{i'!j'!(n-2-i'-j')!} \times p_1^{i'}p_2^{j'}(1-p_1-p_2)^{n-2-i'-j'}$$

Ας θέσουμε $k'=n-2-i'-j'$. Παρατηρείστε ότι όταν προσδιορίζονται τα i', j', προσδιορίζεται ταυτόχρονα και το k'. Το παραπάνω άθροισμα μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως

$$\begin{aligned} & n(n-1)p_1p_2 \sum_{\{(i',j',k'):\ i'+j'+k'=n-2,\ i',j',k'\ge 0\}} \frac{(n-2)!}{i'!j'!k'!} p_1^{i'}p_2^{j'}(1-p_1-p_2)^{k'} \\ & n(n-1)p_1p_2(p_1+p_2+1-p_1-p_2)^{n-2} = n(n-1)p_1p_2 \end{aligned} \tag{5.5}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το πολυωνυμικό θεώρημα. Συνεπώς

$$\mathsf{Cov}(X_1,X_2) = \mathsf{E}[X_1X_2] - \mathsf{E}X_1\mathsf{E}X_2 = n(n-1)p_1p_2 - np_1np_2 = -np_1p_2. \tag{5.6}$$

Ο συντελεστής συσχέτισης ανάμεσα στο X_1 και X_2 είναι

$$\rho_{12} = -\frac{np_1p_2}{\sqrt{np_1(1-p_1)np_2(1-p_2)}} = -\sqrt{\frac{p_1p_2}{(1-p_1)(1-p_2)}}. \tag{5.7}$$

Παρατηρήστε ότι ο συντελεστής συσχέτισης είναι αρνητικός. Αυτό είναι λογικό. Δεδομένου ότι ο αριθμός των πειραμάτων είναι σταθερός, αν έχουμε μεγάλο αριθμό αποτελεσμάτων a_1 τότε αναγκαστικά θα τείνουμε να έχουμε μικρότερο αριθμό αποτελεσμάτων a_2.

5.1.1. *Ρίχνουμε ένα ζάρι 10 φορές. Ποιά είναι η πιθανότητα να πάρουμε 4 εξάρια, 3 πεντάρια, 2 τεσσάρια και ένα τριάρι (με οποιαδήποτε σειρά);*
(Απ. $\binom{10}{4,3,2,1}\frac{1}{6^{10}}$*.)*

5.2 Η πολυμεταβλητή υπεργεωμετρική κατανομή

Ας υποθέσουμε ότι σε μια κάλπη έχουμε K_1 μπάλες χρώματος 1, K_2 μπάλες χρώματος 2, κλπ. και K_m μπάλες χρώματος m. Συνολικά δηλαδή στην κάλπη υπάρχουν $N := K_1 + K_2 + \cdots + K_m$ μπάλες, ασχέτως χρώματος. Από αυτές παίρνουμε, χωρίς επανατοποθέτηση, n μπάλες με $n \le N$. Έστω X_i ο αριθμός των μπαλών χρώματος i, $i = 1,2,\ldots,m$ στο δείγμα μεγέθους n που πήραμε. Τότε

$$\mathsf{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_m = n_m) = \frac{\binom{K_1}{n_1}\binom{K_2}{n_2}\cdots\binom{K_m}{n_m}}{\binom{N}{n}}, \qquad n_i \in \mathbb{N}_0,\ \sum_{i=1}^{m} n_i = n. \tag{5.8}$$

Επισημαίνουμε πάλι ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω έκφραση ακόμα και στην περίπτωση που $n_i > K_i$ μια και ο αντίστοιχος διωνυμικός συντελεστής μηδενίζεται. Συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την έκφραση (5.8) για κάθε διάνυσμα μη αρνητικών ακεραίων $(n_1, \ldots, n_m)$.

Ο λόγος που ισχύει η (5.8) είναι ότι μπορούμε να διαλέξουμε n_i μπάλες χρώματος i από K_i που υπάρχουν στην κάλπη με $\binom{K}{n_i}$ τρόπους ενώ μπορούμε να διαλέξουμε n μπάλες ασχέτως χρώματος από τις N που υπάρχουν στην κάλπη με $\binom{N}{n}$ τρόπους.

Ας επαληθεύσουμε τώρα ότι

$$\sum_{\{(n_1,\ldots,n_m)\}:\sum_{i=1}^m n_i = n} P(X_1 = n_1, \ldots, X_m = n_m) \;=\; 1. \tag{5.9}$$

Προκειμένου να το δείξουμε αρκεί να δούμε ότι

$$\sum_{\{(n_1,\ldots,n_m)\}:\sum_{i=1}^m n_i = n} \binom{K_1}{n_1}\binom{K_2}{n_2}\cdots\binom{K_m}{n_m} \;=\; \binom{N}{n}. \tag{5.10}$$

Ας εξετάσουμε το γινόμενο

$$(1+x_1)^{K_1}(1+x_2)^{K_2}\cdots(1+x_m)^{K_m}.$$

Ο συντελεστής του όρου $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ θα είναι

$$\binom{K_1}{n_1}\binom{K_2}{n_2}\cdots\binom{K_m}{n_m}.$$

Αν θέσουμε τώρα $x_1 = x_2 = \cdots = x_m = x$ τότε

$$(1+x)^{K_1}(1+x)^{K_2}\cdots(1+x)^{K_m} = (1+x)^N \tag{5.11}$$

Με βάση τις παραπάνω παρατηρήσεις, ο συντελεστής του x^n ($n \le N = \sum_{i=1}^m K_i$) στο αριστερό μέλος της (5.11) δίνεται από το αριστερό μέλος της (5.10) ενώ ο συντελεστής του x^n στο δεξί μέλος της (5.11) δίνεται από το δεξί μέλος της (5.10).

Η περιθώρια κατανομή του X_i είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι είναι υπεργεωμετρική. Αρκεί να θεωρήσουμε ότι όλες οι μπάλες που δεν είναι χρώματος i είναι κάποιου άλλου χρώματος που δεν μας ενδιαφέρει και να διαπιστώσουμε ότι

$$P(X_i = n_i) = \frac{\binom{K_i}{n_i}\binom{N-K_i}{n-n_i}}{\binom{N}{n}}, \qquad n_i = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.12}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δούμε ότι η από κοινού κατανομή των X_i, X_j είναι

$$P(X_i = n_i, X_2 = n_j) = \frac{\binom{K_i}{n_i}\binom{K_j}{n_j}\binom{N-K_i-K_j}{n-n_i-n_j}}{\binom{N}{n}}, \qquad n_i + n_j \le n. \tag{5.13}$$

Η μέση τιμή και η διασπορά των X_i, X_j δίνεται από τις γνωστές εκφράσεις για την υπεργεωμετρική κατανομή.

$$EX_i = n\frac{K_i}{N}, \quad \mathsf{Var}(X_i) = n\,\frac{K_i}{N}\,\frac{N-K_i}{N}\,\frac{N-n}{N-1}. \tag{5.14}$$

Για να προσδιορίσουμε την συνδιακύμανση αρκεί να δούμε ότι

$$\begin{aligned} EX_1X_2 &= \sum_{(n_1,n_2):\, n_i\geq 0, n_j\geq 0, \{n_1+n_2\leq n\}} n_1 n_2 \frac{\binom{K_i}{n_i}\binom{K_j}{n_j}\binom{N-K_i-K_j}{n-n_i-n_j}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{K_iK_j}{\binom{N}{n}} \sum_{\{(n_1,n_2):\, n_i\geq 1, n_2\geq 1,\, n_1+n_2\leq n\}} \binom{K_i-1}{n_i-1}\binom{K_j-1}{n_j-1}\binom{N-K_i-K_j}{n-n_i-n_j} \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $l_i = n_i - 1$, $l_j = n_j - 1$ η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} EX_1X_2 &= \frac{K_iK_j}{\binom{N}{n}} \sum_{\{(l_1,l_2):\, l_i\geq 0, l_2\geq 0,\, l_1+l_2\leq n-2\}} \binom{K_i-1}{l_i}\binom{K_j-1}{l_j}\binom{N-2-(K_i-1)-(K_j-1)}{n-2-l_i-l_j} \\ &= K_1K_2\,\frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = n(n-1)\frac{K_1K_2}{N(N-1)}. \end{aligned}$$

Συνεπώς η συνδιακύμανση των X_1, X_2 είναι

$$\begin{aligned} \mathsf{Cov}(X_1, X_2) &= E[X_1X_2] - EX_1EX_2 = n(n-1)\frac{K_1K_2}{N(N-1)} - n\frac{K_1}{N}n\frac{K_2}{N} \\ &= -\frac{n(N-n)}{N-1}\,\frac{K_1}{N}\,\frac{K_2}{N}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Τέλος ο συντελεστής συσχέτισης προσδιορίζεται εύκολα από την (5.15) και την (5.14) και μετά από εύκολες απλοποιήσεις προκύπτει ότι

$$\rho = -\sqrt{\frac{K_iK_j}{(N-K_i)(N-K_j)}}. \tag{5.16}$$

5.2.1. *Ένα κιβώτιο περιέχει χίλιους λαμπτήρες, 100 από τους οποίους δεν λειτουργούν. Οι χίλιοι αυτοί λαμπτήρες τοποθετούνται τυχαία σε 10 κουτιά. Ποιά είναι η πιθανότητα και οι 100 χαλασμένοι λαμπτήρες να βρεθούν στο ίδιο κουτί; Αν* X_i, $i = 1, 2, \ldots, 10$, *είναι ο αριθμός των χαλασμένων δοχείων στο κουτί* i, *ποιά είναι η από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών αυτών;*

5.2.2. *Μια κάλπη έχει* N_1 *σφαιρίδια που γράφουν τον αριθμό 1,* N_2 *που γράφουν τον αριθμό 2 και* N_3 *που γράφουν τον αριθμό 3. Διαλέγω (χωρίς επανατοποθέτηση)* n *σφαιρίδια. Αν* X_i *ο αριθμός των σφαιριδίων, μεταξύ αυτών που επέλεξα, που γράφουν τον αριθμό* i, $i = 1, 2, 3$, *να βρείτε την από κοινού κατανομή των* X_1, X_2, X_3. *Επίσης να ευρεθούν οι μέσοι, διακυμάνσεις και συνδιακυμάνσεις.*