

Μαθηματικός Λογισμός II

Tutorial 1: Δυναμοσειρές, σειρές Fourier

5 Μαρτίου 2017

1. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών

(i) $\sum 2^n x^n$

(ii) $\sum 2^{-n} x^n$

2. Βρείτε τη σειρά Fourier για την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases}$$

Πως πρέπει να οριστεί η συνάρτηση στο $x = 0$ έτσι ώστε η σειρά να συγκλίνει στο $f(x)$ στο διάστημα $(-5, 5)$;

3. Δείξτε ότι

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x$$

για κάθε $x \geq 0$.

Επίσης

$$e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

για κάθε $x \geq 0$.

4. Δείξτε την ταυτότητα του Parseval δηλαδή ότι

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

αν υποθέσουμε ότι η σειρά Fourier για την $f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.

5. Να αποδείξετε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = 5e$