Μαθηματικός Λογισμός ΙΙ
Φυλλάδιο ασκήσεων 8
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

14 Μαΐου 2010

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και οι ισοσταθμικές καμπύλες (η επιφάνειες) των συναρτήσεων:

$$f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}, \quad g(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}, \quad h(x,y,z)=2x+3y-6z,$$

$$k(x,y)=\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & x\in[0,+\infty) \\ \mid y \mid, & x\in(-\infty,0) \end{cases}$$

   Απάντηση $D_f: x^2+y^2\le 4$, ισοσταθμικές: $x^2+y^2=4-c^2, 0\le c\le 2$
   $D_g:(x,y)\neq(0,0)$, ισοσταθμικές: $(x-\frac{1}{c})^2+y^2=\frac{1}{c^2}$
   $D_h:(x,y,z)\in R^3$, ισοσταθμικές τα επίπεδα που σχηματίζονται.
   $D_k:(x,y)\in R^2$, ισοσταθμικές: για $x\ge 0, x^2+y^2=c^2$, ημικύκλια.
   Για $x<0, y=\pm c$, παράλληλες ευθείες.

2. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}, \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{y}e^{-\frac{x^4}{y^2}}$$

   Απάντηση
   α) Παίρνουμε ακολουθίες $(x_n,y_n,z_n)=(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ και $(x_n,y_n,z_n)=(\frac{2}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n})$. Τα όρια είναι διαφορετικά.
   β) Με πολικές συντεταγμένες, πιθανό όριο το 0. Πάνω στην καμπύλη $y=x^2$, το όριο είναι e^{-1}. Δεν υπάρχει όριο.
   γ) Κατα μήκος της $y=kx$ τείνει στο 9, κατα μήκος της $y=kx^2$ εξαρτάται απο το k. Δεν υπάρχει όριο.

3. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια στο σημείο P (0,0) οι συνάρτησεις

$$k(x,y)=\begin{cases} \frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

   Απάντηση
   α)Κατα μήκος της $y=kx$ εξαρτάται απο το k. Δεν υπάρχει όριο.
   β) Με επάλληλα όρια, πιθανό το 0. Εαν θέσω $y=x$, τείνει στο 1. Δεν υπάρχει όριο.

4. Να αποδείξετε οτι το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2},$$

   είναι ίσο με το 0.
   Απάντηση
   Για $x<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}, y<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$ έχουμε $\frac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}<\varepsilon$

5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι 1ης τάξης στο σημείο O(0,0). Σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα της άσκησης 3β, τι συμπέρασμα βγαίνει;

Απάντηση

Με τον ορισμό στο σημείο O(0,0) είναι ίσες με 0. Απο την άσκηση 3β, βρήκαμε οτι το όριο δεν υπάρχει σε αυτό το σημείο. Επομένως, μπορεί να υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ χωρίς την ύπαρξη του ορίου.

6. Δίνεται η συνάρτηση (Peano 1884).

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ στο σημείο O(0,0).
Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

Απάντηση

Με τον ορισμό στο σημείο O(0,0) έχουμε $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$. Επομένως δεν ισχύει πάντα $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

7. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της παρακάτω συνάρτησης μέχρι 2ης τάξης :

$$f(x,y) = xyln(x+y)$$

Απάντηση

$\frac{\partial f}{\partial x} = yln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = xln(x+y) + \frac{xy}{x+y}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = ln(x+y) + \frac{x^2+xy+y^2}{(x+y)^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2+xy}{(x+y)^2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2+xy}{(x+y)^2}$