

Μαθηματικός Λογισμός II
Φυλλάδιο ασκήσεων 8
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

14 Μαΐου 2010

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού και οι ισοσταθμικές καμπύλες (η επιφάνειες) των συναρτήσεων:

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad g(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad h(x, y, z) = 2x + 3y - 6z,$$

$$k(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2}, & x \in [0, +\infty) \\ |y|, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

2. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{y} e^{-\frac{x^4}{y^2}}$$

3. Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια στο σημείο P (0,0) οι συνάρτησεις

$$k(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-y)^2}{x^2 - y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

4. Να αποδείξετε ότι το όριο:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

είναι ίσο με το 0.

5. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι 1ης τάξης στο σημείο O(0,0). Σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα της άσκησης 3β, τι συμπεράσμα βγαίνει;

6. Δίνεται η συνάρτηση (Peano 1884).

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}$$

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ στο σημείο O(0,0).
Τι μπορούμε να συμπεράνουμε;

7. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της παρακάτω συνάρτησης μέχρι 2ης τάξης :

$$f(x, y) = xy \ln(x + y)$$