

Μαθηματικός Λογισμός II  
Φυλλάδιο ασκήσεων 7  
Διανυσματικές συναρτήσεις και καμπύλες στον χώρο

20 Απριλίου 2010

1. Δίνεται η καμπύλη  $r(t) = (2\cos t, 2\sin t, \sqrt{5}t)$ . Να βρεθεί το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα και το μήκος τόξου για  $0 \leq t \leq \pi$ .
2. Δίνεται η καμπύλη  $r(t) = (\frac{2k^2}{3}t, kt^2, t^3)$ . Να δείξετε ότι όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα της σχηματίζουν σταθερή γωνία με το διάνυσμα  $\vec{u} = (1, 0, 1)$ , την οποία και να υπολογίσετε.
3. Δίνεται η καμπύλη  $r(t) = (\frac{2}{\sqrt{1-t^2}}, 0, \frac{\sqrt{3}}{1+t^2})$ . Να βρεθεί το ολοκλήρωμα  $\int_0^1 r(t)dt$ .
4. Δίνεται η καμπύλη  $r(t) = (t, t^2, t^3)$ . Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της και το κάθετο επίπεδο στο σημείο  $t = 1$
5. Να βρεθεί η παράμετρος μήκους τόξου με σημείο αναφοράς το  $t = 0$ , για την καμπύλη

$$r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$$

6. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων ταχύτητας και επιτάχυνσης κατά την χρονική στιγμή  $t = 1$ , για ένα σώμα που κινείται πάνω στην καμπύλη  $r(t) = (3t + 1, \sqrt{3}t, t^2)$
7. Να βρεθούν τα διανύσματα T, N και η καμπυλότητα  $\kappa$  για την καμπύλη του επιπέδου :  $r(t) = (t, \ln(\cos t))$
8. Έστω τα σημεία A, B, Γ με διανύσματα θέσης  $(9i - 2j + k)$ ,  $(6i + 2j + 6k)$ ,  $(3i + pj + qk)$  αντιστοίχως. Να βρεθούν:
  - α) Η εξίσωση της ευθείας AB.
  - β) Εάν γνωρίζουμε ότι το σημείο Γ βρίσκεται πάνω στην ευθεία AB, να βρεθούν τα  $p, q$ .
  - γ) Να υπολογίσετε σε μοίρες την γωνία μεταξύ  $\vec{OA}$  και  $\vec{OB}$ .
  - δ) Εάν Δ είναι σημείο της AB με OΔ κάθετο στην AB, να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Δ.