

Μαθηματικός Λογισμός II  
Φυλλάδιο ασκήσεων 6  
Σειρές Fourier, Επίπεδα και ευθείες στον χώρο

10 Μαΐου 2010

1. Βρείτε τη σειρά Fourier για την συνάρτηση

$$f(x) = 2x - 1, \quad -\pi \leq x \leq \pi \quad (1)$$

**Απάντηση**  $a_0 = -2 \quad a_n = 0 \quad b_n = \frac{-4(-1)^n}{n}$

2. Να βρεθεί η ελάχιστη απόσταση και η κοινή κάθετη των ευθειών :

$$x - 1 = \frac{y-9}{-2} = z - 5 \text{ και } \frac{x-6}{7} = \frac{y+7}{-6} = z,$$

αφού αποδείξετε ότι είναι ασύμβατες.

**Απάντηση** Λύνουμε το σύστημα των παραμετρικών τους εξισώσεων και είναι αδύνατο, άρα δεν τέμνονται.

Στη συνέχεια παίρνουμε τυχαία σημεία A, B στις ευθείες:  $A(1+t, 9-2t, 5+t), B(6+7s, -7+6s, s)$ .

Το ευθύγραμμο τμήμα AB θα είναι κάθετο στα διανύσματα των ευθειών, άρα  $AB \cdot \vec{a} = 0, AB \cdot \vec{b} = 0$ . Έτσι παίρνουμε  $t = 2, s = -1, |AB| = 2\sqrt{29}, AB : \frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-7}{8}$

3. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που ορίζεται:

α) από τα σημεία A(1, 2, 3), B(-2, 5, 9) και Γ(0, 4, -8).

β) Περνά από τα σημεία A(1, 2, 3) B(3, -2, 1) και είναι κάθετο στο επίπεδο  $3x - 2y + 4z = 5$

**Απάντηση** α)  $15x + 13y + z = 44$

β)  $20x + 14y - 8z = 24$

4. Να βρεθεί η εξίσωση της τομής των επιπέδων  $6x + y - z + 2 = 0, \quad 2x - y + 3z = 14$ .

(Αναλυτική και παραμετρική)

**Απάντηση**  $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{v} = (2, 3, 1)$  άρα τέμνονται. Παίρνουμε πχ  $z = 0$  για κοινό σημείο, και έχουμε  $x = 1, y = 0$ . Έτσι, η ευθεία είναι  $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{1}$

5. Να αποδειχτεί ότι η ευθεία  $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{-9}$  βρίσκεται πάνω στο επίπεδο

$$3x + 5y - z + 14 = 0$$

**Απάντηση** Πρώτα αποδεικνύουμε ότι το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου είναι κάθετο και στην ευθεία και στη συνέχεια ότι το σημείο A(0, -2, 4) ανήκει στο επίπεδο.