Μαθηματικός Λογισμός ΙΙ
Φυλλάδιο ασκήσεων 4
Σειρές Fourier, Διανύσματα στον χώρο

27 Μαρτίου 2010

1. Βρείτε τη σειρά Fourier για την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -5 < x < 0 \\ 3 & 0 < x < 5 \end{cases}$$

Πως πρεπει να οριστεί η συνάρτηση στο $x = 0$ έτσι ώστε η σειρά να συγκλίνει στο $f(x)$ στο διάστημα $(-5, 5)$;
Απάντηση
$L = 5$. Έχουμε ότι

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\,dx = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\,dx = \frac{3}{5}\left(\frac{5}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right)\Big|_0^5 = 0$$

για $n \neq 0$.
Όμοια $a_0 = 3$ και

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\,dx = \frac{3}{5}\int_{0}^{5}\sin\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\,dx = \frac{3}{5}\left(-\frac{5}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{5}\right)\right)\Big|_0^5 = \frac{3(1-cos(n\pi))}{n\pi}$$

Απο την θεωρία της σύγκλισης των σειρών Fourier για να έχουμε την συνέχεια στο $x = 0$ θα πρέπει $f(0) = \frac{3}{2}$ (το ημιάθροισμα του δεξιού και του αριστερού ορίου).

2. Δείξτε την ταυτότητα του Parceval δηλαδή ότι

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

αν υποθέσουμε ότι η σειρά Fourier για την $f(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα.
Απάντηση
Αν

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

τότε

$$f(x)^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\frac{a_0}{2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\frac{a_0}{2}b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_n a_m\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + b_n b_m\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) + a_n b_m\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$$

Ολοκληρώνουμε απο $-L$ ως L και παίρνουμε το ζητούμενο.

3. Να αποδείξετε με την χρήση διανυσμάτων τον νόμο των ημιτόνων.
Απάντηση
$\overrightarrow{\alpha} + \overrightarrow{\beta} + \overrightarrow{\gamma} = \overrightarrow{0}$ Πολλαπλασιάζουμε (εξωτερικό γινόμενο) με $\overrightarrow{\alpha}$ και απο τον ορισμό του εξ. γινομένου παίρνουμε $\frac{|a|}{sin(A)} = \frac{|\beta|}{sin(B)}$

4. Να αποδειχτεί οτι $(a \times b)^2 = a^2b^2 - (ab)^2$
   Απάντηση
   $(a \times b)^2 = a^2b^2cos^2\theta = a^2b^2 - a^2b^2sin2\theta = a^2b^2 - (ab)^2$

5. Να εξεταστεί αν τα διανύσματα : $\vec{u} = (3,2,1), \vec{v} = (5,-1,2), \vec{w} = (8,1,3)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
   Απάντηση
   Βρίσκουμε το μικτό γινόμενο τους, και παίρνουμε οτι $(u \times v) \bullet w = det(u,v,w) = 0$, επομένως είναι συνεπίπεδα, άρα γραμμικά εξαρτημένα.