

# Μαθηματικός Λογισμός II

## Φυλλάδιο ασκήσεων 3

### Πολικές συντεταγμένες - Τύπος Taylor

24 Μαρτίου 2010

1. Να βρεθεί η σειρά Mc Laurin για τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad g(x) = x \sin x, \quad h(x) = x^2 \cos(x^3)$$

**Απάντηση**

α) Όπου  $x$  το  $-x$ , και έχουμε  $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$

β)  $x \sin x = x^2 - \frac{x^4}{3!} + \frac{x^6}{5!} - \dots$

γ)  $x^2 \cos(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{6k+2}}{(2k)!}$

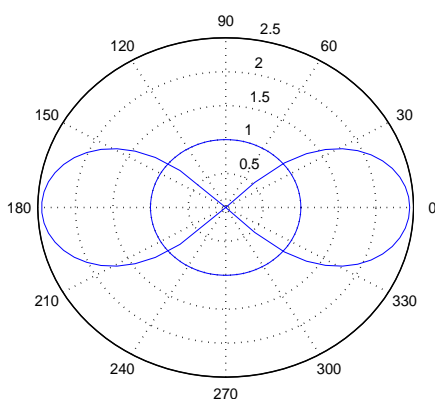
2. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τον λημνίσκο  $r^2 = 6\cos(2\theta)$  και τον κύκλο  $r = \sqrt{3}$ , να βρείτε τα κοινά τους σημεία και να βρείτε τις εφαπτομένες του λημνίσκου στον πόλο. Στη συνέχεια, να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται εσωτερικά του λημνίσκου  $r^2 = 6\cos(2\theta)$  και εξωτερικά του κύκλου  $r = \sqrt{3}$

**Απάντηση**

Κοινά σημεία:  $\theta = \pm \frac{\pi}{6}, \pm \frac{5\pi}{6}$

Εφαπτομένες:  $r^2 = 6\cos(2\theta) \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$

Εμβαδόν:  $3\sqrt{3} - \pi$



Σχήμα 1:  $r^2 = 6\cos(2\theta)$ ,  $r = \sqrt{3}$

3. Να βρεθεί η κλίση της καμπύλης  $r\theta = 1$  στο σημείο με  $\theta = \frac{\pi}{3}$

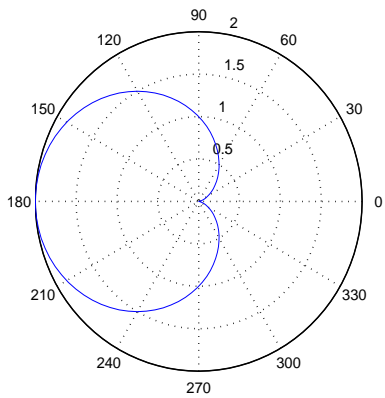
**Απάντηση**

Βρίσκουμε με τον τύπο το  $\frac{dy}{dx} = \frac{\pi - 3\sqrt{3}}{\sqrt{3}\pi + 3} = \tan \omega$

4. Να βρεθεί το μήκος τόξου της καρδιοειδούς καμπύλης  $r = 1 - \cos\theta$

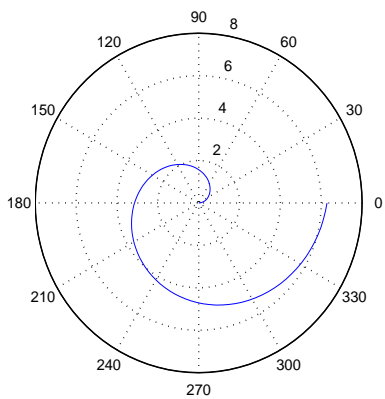
**Απάντηση**

8



Σχήμα 2:  $r = 1 - \cos\theta$

5. Να βρεθεί το μήκος τόξου της σπείρας του Αρχιμήδη  $r = \theta, \theta \in [0, 2\pi]$



Σχήμα 3:  $r = \theta$

**Απάντηση**

$$2\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})$$

6. Να αποδείξετε ότι  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!} = 5e$

**Απάντηση**

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$  Πολλαπλασιάζουμε με  $x$ , παραγωγίζουμε, πολλαπλασιάζουμε ξανα με  $x$ , παραγωγίζουμε και θέτουμε  $x = 1$ .