Μαθηματικός Λογισμός ΙΙ
Φυλλάδιο ασκήσεων 2
Δυναμοσειρές - Πολικές συντεταγμένες

11 Μαρτίου 2010

1. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών

   (i) $\sum 2^n\, x^n$
   (ii) $\sum 2^{-n}\, x^n$
   (iii) $\sum n\, x^n$
   (iv) $\sum \frac{1}{n^n}\, x^n$

   Απάντηση

   (i) $1/2$
   (ii) 2
   (iii) 1
   (iv) ∞

2. Βρείτε τις ακτίνες και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

   (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}\, x^n$
   (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

   Απάντηση
   α)Η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1$, και το διάστημα σύγκλισης $x \in [-1, 1]$
   β)Το διάστημα σύγκλισης $x \in [-2, 0)$

3. Έστω a_n μια ακολουθία θετικών αριθμών και έστω $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A > 0$. Δείξτε ότι $\lim(a_n)^{\frac{1}{n}} = A$. Τι μας λέει αυτό σχετικά με τις δυναμοσειρές;
   Απάντηση Για δεδομένο $\epsilon > 0$ έστω n_0 τέτοιο ώστε $A - \epsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq A + \epsilon$ αν $n \geq n_0$. Μπορούμε να γράψουμε

$$a_n = a_1 \prod_{k=1}^{n_0-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} \prod_{k=n_0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

   Υπάρχουν σταθερές $C_1(\epsilon)$, $C_2(\epsilon)$ τέτοιες ώστε

$$C_1(\epsilon)\,(A-\epsilon)^{n-n_0} \leq a_n \leq C_2(\epsilon)\,(A+\epsilon)^{n-n_0}$$

   Αν $C_1^{'}(\epsilon) = C_1(\epsilon)\,(A-\epsilon)^{-n_0}$, $C_2^{'}(\epsilon) = C_2(\epsilon)\,(A+\epsilon)^{-n_0}$ τότε

$$C_1^{'}(\epsilon)^{1/n}\,(A-\epsilon) \leq a_n^{1/n} \leq C_2^{'}(\epsilon)^{1/n}\,(A+\epsilon) \tag{1}$$

   Υπάρχει $N \geq n_0$ τέτοιο ώστε για $n \geq N$ να έχουμε

$$C_1^{'}(\epsilon)^{1/n} = 1 + \delta_1(n), \ \mid \delta_1(n) \mid \leq \frac{\epsilon}{A-\epsilon},$$
$$C_2^{'}(\epsilon)^{1/n} = 1 + \delta_2(n), \ \mid \delta_2(n) \mid \leq \frac{\epsilon}{A+\epsilon},$$

Άρα

$$A - \epsilon + \delta_1(n)(A - \epsilon) \leq a_n^{1/n} \leq A + \epsilon + \delta_2(n)(A + \epsilon)$$

άρα

$$\mid a_n^{1/n} - A \mid \leq 2\epsilon$$

4. Δείξτε ότι

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x$$

για κάθε $x \geq 0$.
Επίσης

$$e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

για κάθε $x \geq 0$.
Απάντηση Χρησιμοποιείστε την σειρά Taylor και τον τύπο του υπολοίπου.
Στο (β) ερώτημα, θέτω όπου χ το -χ και το υπόλοιπο είναι αρνητικό.

5. Να βρεθεί με την βοήθεια των δυναμοσειρών το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων.
Απάντηση
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots$ επομένως $e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$.
Άρα $\int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 (1 + (-x^2) + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \ldots) dx$, και για 6 όρους η απάντηση είναι 0.74673, ενώ για 7 όρους είναι 0.74684 που είναι ακριβής με 4 δεκαδικά ψηφία.