

Μαθηματικός Λογισμός II
Φυλλάδιο ασκήσεων 2
Δυναμοσειρές - Πολικές συντεταγμένες

9 Μαρτίου 2010

1. Βρείτε τις ακτίνες σύγκλισης των δυναμοσειρών

(i) $\sum 2^n x^n$

(ii) $\sum 2^{-n} x^n$

(iii) $\sum n x^n$

(iv) $\sum \frac{1}{n^n} x^n$

2. Βρείτε τις ακτίνες και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^n$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$

3. Έστω a_n μια ακολουθία θετικών αριθμών και έστω $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = A > 0$. Δείξτε ότι $\lim(a_n)^{\frac{1}{n}} = A$. Τι μας λέει αυτό σχετικά με τις δυναμοσειρές;

4. Δείξτε ότι

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} \leq e^x$$

για κάθε $x \geq 0$.

Επίσης

$$e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}$$

για κάθε $x \geq 0$.

5. Να βρεθεί με την βοήθεια των δυναμοσειρών το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ με ακρίβεια 4 δεκαδικών ψηφίων.

6. Να βρεθεί η σειρά Mc Laurin για τις παρακάτω συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad g(x) = x \sin x, \quad h(x) = x^2 \cos(x^3)$$

7. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $r = \cos(3\theta)$ στον πόλο.

8. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τον λημνίσκο $r^2 = 6\cos(2\theta)$ και τον κύκλο $r = \sqrt{3}$, να βρείτε τα κοινά τους σημεία και να βρείτε τις εφαπτομένες του λημνίσκου στον πόλο.

9. Να βρεθεί η κλίση της καμπύλης $r\theta = 1$ στο σημείο με $\theta = \frac{\pi}{3}$